III Kurvenintegrale und Stammfkt.

§ 1. Reimann-Steiltjes Integrale und Funktionen von beschränkter Variation

Def: Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a,b] \to L$
$g: [a,b] \to L$
gegeben, wobei $L = \mathbb{C}$ oder $L = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

1) Ist $Z: a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ eine Zerlegung (Partition) von $[a,b]$, so heißt jede Zahl

$$S := \sum_{k=1}^{k} f(\tau_k) \cdot (g(t_k) - g(t_{k-1}))$$

(„$\cdot$" im Fall $L = \mathbb{C}$ – komplexe Multiplikation,
„$\cdot$" im Fall $L = \mathbb{R}^d$ – das kanonische Skalarprodukt)
mit $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$, $k = 1, \ldots, k$ eine Reimann-Steiltjes-Summe (RS-Summe) von f nach g bezüglich Z.

2) Eine Zahl $I \in \mathbb{C}$ heißt Reimann-Steiltjes Integral (RS-Integral) von f nach g über $[a,b]$ und f nach g über $[a,b]$ Reimann-Steiltjes-integrierbar (RS-integrierbar)

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ eine Zerlegung Z_ε von $[a,b]$: $\forall$ Verfeinerungszerlegung Z von Z_ε ($Z \supset Z_\varepsilon$) und $\forall$ RS-Summen S von f nach g bezüglich Z gilt $|S - I| < \varepsilon$.

$I := \int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f\, dg$.

Hier heißt f Integrand und g Belegungsfkt. oder Integratorfunktion von $\int_a^b f\, dg$.

Man setzt

$$\int_a^a f\, dg := 0, \quad \int_b^a f\, dg = -\int_a^b f\, dg.$$

Bem: • reelle RS-Integral ist ein Spezialfall von $L = \mathbb{C}$ mit reellwertigen f und g als auch von $L = \mathbb{R}^d$ mit $d = 1$.

• im Fall $L = \mathbb{R}^d$ mit $f = (f_1, \dots, f_d)$, $g = (g_1, \dots, g_d)^T$ gilt

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b (f_1, \dots, f_d)\, d\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j\, dg_j.$$

• im Fall $L = \mathbb{C}$ mit $f = f_1 + i f_2$, $g = g_1 + i g_2$

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b (f_1 + i f_2)\, d(g_1 + i g_2) = \int_a^b f_1\, dg_1 - \int_a^b f_2\, dg_2 + i \int_a^b f_2\, dg_1 + i \int_a^b f_1\, dg_2$$

falls die rechte Seite existiert.

Satz III.1: (Cauchysches Integrabilitätskriterium)

Vor.: Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f:[a,b] \to L$, $g:[a,b] \to L$ gegeben wobei $L = \mathbb{C}$ oder $L = \mathbb{R}^d$.

Beh.: $\exists \int_a^b f\,dg \iff \forall \varepsilon > 0, \exists Z(\varepsilon) : \forall Z, Z' \supset Z(\varepsilon)$ und RS-Summen S, S' von f nach g bezgl. Z, Z' gilt $|S - S'| < \varepsilon$.

Beweis: $\Rightarrow$ $\exists I \in \mathbb{C}$ mit: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Z(\varepsilon)$ von $[a,b]$, so dass $\forall Z, Z' \supset Z(\varepsilon)$ und RS-Summen bezgl. Z, Z' gilt

$|S - I| < \varepsilon$ und $|S' - I| < \varepsilon$.

$\Rightarrow |S - S'| = |S - I + I - S'| \le |S - I| + |S - I'| < 2\varepsilon$.

$\Leftarrow$ 1. wähle $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und sei S_n eine RS-Summe von f nach g bezüglich $Z(\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben wähle $N = N(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall m, n \ge N$ gilt $|S_n - S_m| < \varepsilon$, denn ist S eine beliebige RS-Summe bezgl. einer gemeinsamen Verfeinerung Z von $Z(\frac{1}{n})$ und $Z(\frac{1}{m})$ so gilt

$|S_n - S_m| \le |S_n - S| + |S - S_m| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N} < \varepsilon$.

2. Sei $\varepsilon > 0$ siehe obige Def. Wähle gemäß 1.) $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|S_{n_0} - I| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ist S eine beliebige RS-Summe von f nach g bezgl. einer Verfeinerung von $Z(\frac{1}{n_0})$, so gilt nach Def. von $Z(\frac{1}{n_0})$:

$$|S - I| \leq |S - S_{n_0}| + |S_{n_0} - I| < \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Insgesamt: $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ Zerlegung $Z_\varepsilon : Z(\frac{1}{n_0(\varepsilon)})$ von $[a,b]$ $\forall$ Verfeinerungen Z von $Z(\frac{1}{n_0(\varepsilon)})$ und $\forall$ RS-Summen S von f nach g bezgl. Z gilt $|S - I| < \varepsilon$

<u>Def</u>: $g : [a,b] \to L$ heißt auf $[a,b]$ von beschränkter Variation (Schwankung) oder $g \in BV([a,b]) :\Longleftrightarrow$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) := \sup_{Z} \sum_{k=1}^{K} \| g(t_k) - g(t_{k-1}) \| < \infty$$

wobei Z alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, $k \in \mathbb{N}$ von $[a,b]$ durchläuft. $\| \cdot \|$ bedeutet die euklidische Norm.

Satz III.2 Vor.: Seien $f:[a,b]\to L$, $g:[a,b]\to L$ gegeben mit $f\in C([a,b])$, $g\in BV([a,b])$

Beh.: $\exists \int_a^b f(t)\,dg(t)$

Es gilt: $\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \int_a^b \|f(t)\|\,d\overset{t}{\underset{a}{V}}(g) \le K_e \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$, wobei $t\in[a,b]$

$\|f(t)\|\le K_e$ $\quad(*)$

speziell für $L=\mathbb{C}$: $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

Beweis: Sei $\varepsilon>0$ beliebig und $\tilde{\varepsilon} := \dfrac{\varepsilon}{2(1+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g))}$.

f ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$

$\Rightarrow$ zu $\tilde{\varepsilon}$ $\exists\,\delta>0$: $\forall x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$ gilt $|f(x)-f(y)|<\tilde{\varepsilon}$

Wähle $Z(\varepsilon)$: $a=t_0<t_1\ldots<t_k=b$ mit $t_k-t_{k-1}<\delta$, $k=1\ldots K$

und $S(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\left(g(t_k)-g(t_{k-1})\right)$

Seien S, S' RS-Summen von f nach g bezgl. Verfeinerungen Z, Z' von $Z(\varepsilon)$.

$\Rightarrow$

$$S = \sum_{\varkappa=1}^{K} \sum_{\mu=1}^{r_\varkappa} f(\tau_\mu^{(\varkappa)}) \left(g(t_\mu^{\varkappa}) - g(t_{\mu-1}^{(\varkappa)}) \right)$$

mit $t_{\varkappa-1} = t_0^{(\varkappa)} < t_1^{(\varkappa)} < \ldots < t_{r_\varkappa}^{(\varkappa)} = t_\varkappa$

$$t_{\mu-1}^{(\varkappa)} \leq \tau_\mu^{(\varkappa)} \leq t_\mu^{(\varkappa)} \qquad \mu = 1, \ldots, r_\varkappa, \quad \varkappa = 1, \ldots K$$

$$|S - S(\varepsilon)| \overset{CSU}{\leq} \sum_{\varkappa=1}^{K} \sum_{\mu=1}^{r_\varkappa} \underbrace{\| f(\tau_\mu^{(\varkappa)}) - f(t_\varkappa) \|}_{< \tilde{\varepsilon} \text{ denn } |\tau_\mu^{(\varkappa)} - t_\varkappa| < \delta} \| g(t_\mu^{(\varkappa)}) - g(t_{\mu-1}^{(\varkappa)}) \|$$

$$\leq \tilde{\varepsilon} \sum_{\varkappa=1}^{K} \sum_{\mu=1}^{r_\varkappa} \| g(t_\mu^{\varkappa}) - g(t_{\mu-1}^{(\varkappa)}) \| \leq \tilde{\varepsilon} \, \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Analog gilt $|S' - S(\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |S - S'| < \varepsilon$.

Aus Satz III. 1. folgt die Existenz von $\int_a^b f \, dg$ und analog

$\int_a^b f_j \, dg_j \quad j = 1, \ldots, d^a$ falls $L = \mathbb{R}^d$

$\int_a^b f_\varkappa \, dg_\varkappa \quad \varkappa = 1, 2$ falls $L = \mathbb{C}$.

- Für jede RS-Summe gilt mit der CSU

$$\left| \sum_{r=1}^{K} f(\tau_r)\big(g(t_r) - g(t_{r-1})\big) \right| \le \sum_{r=1}^{K} \|f(\tau_r)\| \, \|g(t_r) - g(t_{r-1})\|$$

$$\le \sum_{r=1}^{K} \|f(\tau_r)\| \overset{t_r}{\underset{t_{r-1}}{V}}(g)$$

$$= \sum_{r=1}^{K} \|f(\tau_r)\| \left(\overset{t_r}{\underset{a}{V}}(g) - \overset{t_{r-1}}{\underset{a}{V}}(g) \right)$$

und damit (*).

$\blacksquare$