**Satz III.3:** Vor.: Sei $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ ein Gebiet und seien

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$
$$g : G \to \mathbb{R}^m$$
$$h : [a,b] \to G$$

gegeben mit $f \in C([a,b])$, $g \in C_1([a,b])$

$h \in C([a,b])$ und $h \in BV([a,b])$

Beh.: $g \circ h \in BV([a,b])$ und mit $g' \in \mathbb{R}^{m \times d}$

$$\exists \int_a^b f(t) \, d\, g(h(t)) = \int_a^b f(t)\, g'(h(t)) \, d\, h(t).$$

(ohne Beweis)

**Satz III.4:** Vor.: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $g : G \to \mathbb{C}$,

$h : [a,b] \to G$ gegeben mit $f : C([a,b])$,

$g \in H(G)$ holomorph, $g' \in C(G)$, $h \in C([a,b])$, $h \in BV([a,b])$

**Beh.:** $\exists \int_a^b f(t) \, d g(h(t)) = \int_a^b f(t)\, g'(h(t)) \, d h(t)$

Bew.: Wegen der Linearität sei ohne Einschränkung $f$ reellwertig.

Mit $g = g_1 + i g_2$, $h = h_1 + i h_2$

$$\overset{\text{Lin.}}{\Rightarrow} \int_a^b f(t)\, d g(h(t)) = \int_a^b f(t)\, d g_1(h(t)) + i \int_a^b f(t)\, d g_2(h(t))$$

$$\overset{\text{Satz II.3.}}{=} \int_a^b f(t) \begin{pmatrix} g_{1,x}(h(t)) \\ g_{1,y}(h(t)) \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = \int_a^b f(t)\, g_{1,x}(h(t))\, d h_1(t) + \int_a^b f(t)\, \underbrace{g_{1,y}}(h(t))\, d h_2(t)$$

$$+ i \int_a^b f(t)\, g_{2,x}(h(t))\, d h_1(t) + \int_a^b f(t)\, \underbrace{g_{2,y}(h(t))}\, d h_2(t)$$

Mit den Cauchy-Reimannschen Dgl. $g_{1,y} = -g_{2,x}$ und $g_{2,y} = g_{1,x}$

$$\int_a^b f(t)\, d g(h(t)) = \int_a^b f(t) \big(g_{1,x}(h(t)) + i\, g_{2,x}(h(t))\big)\, d\big(h_1(t) + i h_2(t)\big)$$

$$= \int_a^b f(t)\, g'(h(t))\, d h(t).$$

<u>Satz III.5.</u> Vor.: Seien $f : [a,b] \to L$ $\quad (L = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d)$,

$g : [a,b] \to L$ mit $f \in C([a,b])$, $g \in C_1([a,b])$

Beh.: $\exists \int_a^b f(t)\, d g(t) = \int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt$ ← normales Reimann-Integral.

__Beweis:__ 1) Falls $L = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ so setzt man $g$ stetig diffbar fort auf $\mathbb{R}$.
Mit $h := id_{[a,b]}$ folgt die Beh. aus Satz 3.

2) Falls $L = \mathbb{R}^d$, $d > 1$ so ist $f = (f_1, \dots, f_d)$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix}$

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j(t)\, d\, g_j(t) \overset{1.}{=} \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j(t) g_j'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(t) g'(t)\, dt$$

3. Falls $L = \mathbb{C}$ so ist wegen der Linearität des Integral o.B.d.A. $f$ reellwertig. Mit $g = g_1 + i g_2$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f(t)\, dg_1(t) + i \int_a^b f(t)\, dg_2(t)$$

$$\overset{1.)}{=} \int_a^b f(t) g_1'(t)\, dt + i \int_a^b f(t) g_2'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt.$$

■

# III. 2. Kurvenintegrale

**Wdh.:** Jede stetige Abbildung $f(t): [a,b] \to L$ nennt man einen Weg in $L$.
Unter einer Kurve $C$ in versteht man die zu einem Weg $f: [a,b] \to L$ gehörige Punktmenge $\{f(t) : t \in [a,b]\}$.
Die Gleichung $x = f(t) \quad (a \le t \le b)$ nennt man dann auch Parameterdarstellung von $C$, $t$ selbst einen Parameter.

$f(a)$ heißt Anfangspunkt
$f(b)$ heißt Endpkt. des Weges

und man sagt der Weg $f$ oder die Kurve $C$ verbindet die Pkt. $f(a)$, $f(b)$.

**Bem.:** Ein und dieselbe Kurve kann zu verschiedenen Wegen gehören, oder verschiedene Parameterdarstellungen besitzen.

**Def.:** • Eine Kurve $C = C_f$ in $L$ (wobei $L = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$), die gegeben ist durch eine stetige Parameterdarstellung $f(t): [a,b] \to L$ heißt rektifizierbar (von endlicher Länge)

$$:\Leftrightarrow \quad \underbrace{\ell(C)}_{=C_f} := \bigvee_a^b (f) < \infty$$

- Eine Kurve $C$ in $\mathbb{C}$ heißt stückweise glatt $:\Leftrightarrow$
  $\exists$ Zerlegung $a = s_0 < \ldots < s_\ell = b$ von $[a,b]$, so dass für auf $[a,b]$ stetige Parameterdarstellungen $f(t)$ von $C$ auf jedem Teilintervall $[s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, \ldots, \ell$, $f(t) \in C_1([s_{k-1}, s_k])$ gilt.
- Die Kurvenlänge $\ell(C)$ kann für $g \in C_1([a,b])$ durch $\ell(C) = \int_a^b \| g'(t) \| \, dt$ berechnet werden. (siehe Analysis II)

Insbesondere gilt für Kurven $C \subset \mathbb{C}$ mit Parameterdarstellung $f := [a,b] \to \mathbb{C}$ und $f \in C_1([a,b])$ für die Kurvenlänge

$$\ell(\underset{C_f}{C}) = \int_a^b \| f'(t) \| \, dt .$$

<u>Def</u>: - Ein Integrationsweg $U \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig diffbarer Weg $f : [a,b] \to U$.
- Ist $f$ auf dem ganzen Intervall $[a,b]$ stetig diffbar, so sagt man $f$ ist ein stetig diffbarer Weg. Gilt zusätzlich $f'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$, so heißt $f$ <u>glatt</u>.

- $\gamma$ geschlossen $:\Leftrightarrow$ Anfangspkt. $\gamma(a)$ und Endpkt. $\gamma(b)$ stimmen überein.
- Bildmenge $\gamma([a,b])$ heißt Spur von $\gamma$, Schreibweise: $\gamma([a,b]) = \operatorname{Sp}\gamma$.

<u>Beispiele:</u> 1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Die Abbildung

$$\kappa : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad t :\to z_0 + re^{it}$$

ist stetig diffbar, $\kappa'(t) = ire^{it}$.
Die Abbildung ist ein geschlossener Weg, dessen Spur die Kreislinie $\partial D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ ist. Wir bezeichnen diesen Weg oft mit $\kappa(r, z_0)$ – positiv orientierte Kreislinie.

2. Für $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ parametrisiert $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \to z_0 + t(z_1 - z_0)$ die Verbindungsstrecke von $z_0$ nach $z_1$. Wir parametisieren diesen Weg mit $[z_0, z_1]$.

<u>Def.:</u> Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f : \operatorname{Sp}\gamma \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Man setzt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Beachte:
- $\gamma$ ist ein Integrationsweg, d.h. stückweise stetig diffbar, d.h. die rechte Seite existiert
- es genügt sogar $f \in C([a,b])$, $\gamma \in BV([a,b])$. Dann definiert man mit RS-Summen

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,d\gamma(t).$$