Beispiel: 1. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$,

$$k: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad k(t) = z_0 + re^{it}$$

$$\int_{k(r,z_0)} f(z)\,dz = \int_{k(r,z_0)} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} f(k(t))\,k'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot ire^{it}\,dt = 2\pi i$$

(unabhängig von r)!

↖ Kreislinie $k(r, z_0)$

<u>Schreibweise:</u> $\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$ oder $\int_{\partial D} f(z)\,dz$

$D := D_r(z_0) = k(r, z_0)$

2. Wir integrieren die Funktion $f(z) = |z|$ über den Weg $\gamma: [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \to e^{i(\pi - t)}$, der den oberen Halbkreis von -1 nach 1 beschreibt. Wegen $|z| = 1$ auf $Sp\,\gamma$ erhalten wir

$$\int_\gamma |z|\,dz = \int_0^\pi 1 \cdot \gamma'(t)\,dt = \gamma(\pi) - \gamma(0) = 1 - (-1) = 2.$$

Integration der gleichen Funktion über die Strecke $[-1, 1]$ liefert $\int_{[-1,1]} |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |t|\,dt = 1$. (Kurvenintegrale sind i.a. <u>nicht</u> unabhängig vom Integrationsweg)

Satz III.6: Es sei γ ein Integrationsweg und f eine auf $\operatorname{Sp}\gamma$ stetige Funktion. Dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq l(\gamma) \cdot \max_{z \in \operatorname{Sp}\gamma} |f(z)| .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \right| \\
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq \int_a^b \max_{z \in \operatorname{Sp}\gamma} |f(z)|\; |\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq \max_{z \in \operatorname{Sp}\gamma} |f(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt}_{l(\gamma)}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definition: Es seien I und J kompakte reelle Intervalle.
Unter einer <u>Parametertransformation</u> von J auf I versteht wir eine surjektive stückweise stetig diffbare Abbildung $\varphi: J \to I$, für die stets gilt $\varphi'(t) > 0$ gilt.
(in den Unstetigkeitsstellen von φ' soll das bedeuten, dass die einseitigen Ableitungen von φ positiv sind).

- Ist $\gamma: I \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $\varphi: J \to I$ eine Parametertransformation, so ist auch $\gamma \circ \varphi: J \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg.
- $\gamma \circ \varphi$ geht aus γ durch Umparametrisierung hervor.
- Anfangspkt., Endpkt. und Spur ändern sich bei einer Umparametrisierung nicht.

Satz III.7: (Kurvenintegrale sind invariant gegenüber Parametertransformationen)

Vor.: γ_1 und γ_2 sind Integrationswege in $\mathbb{C}$. γ_2 geht durch Umparametrisierung aus γ_1 hervor.

Beh.: Dann gilt für jede auf $Sp\,\gamma_1$ stetige Funktion f: $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

Beweis: Die Definitionsintervalle von γ_1 und γ_2 seien mit $[a,b]$ bzw. $[c,d]$ bezeichnet. Es gilt $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ mit einer Parametertransformation φ.

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt$$

$$\overset{\substack{\text{Substitutions-}\\ \text{regel}}}{=} \int_c^d f(\gamma_1 \circ \varphi(s))\,\gamma_1'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds$$

$$= \int_c^d f(\gamma_2(s))\,\gamma_2'(s)\,ds = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\blacksquare$

Bemerkungen: · Ist γ ein Integrationsweg und γ^{-1} der entgegengesetzte Weg, so gilt wegen $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$ und $(\gamma^{-1})'(t) = -\gamma'(a+b-t)$. Mit der Substitution $s = a+b-t$

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,dz = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\,\gamma'(a+b-t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds$$

$$= -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

- Seind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ Integrationswege, die sich zu einem Weg γ zusammensetzen, dann gilt für jede auf Sp γ stetige Funktion f

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz .$$

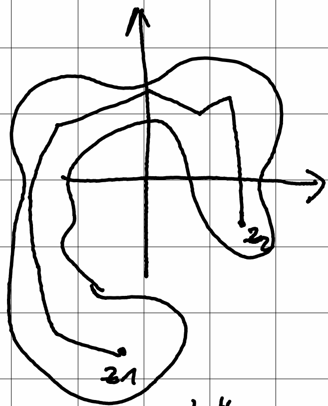
III. 3. Der Cauchysche Integralsatz

Komplexe Integrale sind i.a. abhängig vom Integrationsweg.

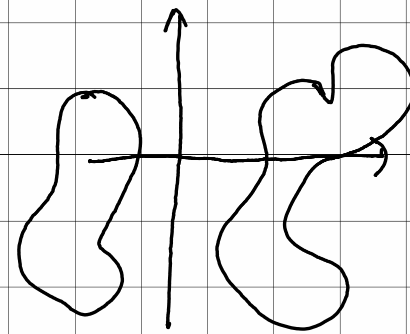
Problem: Für welche Funktionenklasse sind komplexe Integrale wegunabhängig?

Def.: Eine offene zusammenhängende Menge D in $\mathbb{C}$ heißt ein Gebiet.
(zu zwei beliebigen Pkt. z_1 und $z_2 \in D$ gibt es ein Polygonzug, der ganz in D verläuft)

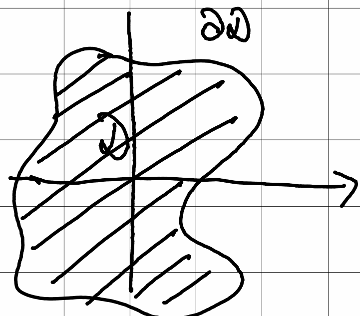
Ein Gebiet D nennt man einfach zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Polygonzug in D stetig innerhalb von D auf einen Pkt. zusammenziehen läßt. (anschaulich: wenn D keine Löcher besitzt)



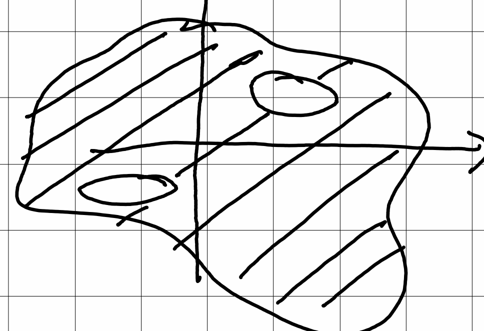
zusammenhängende Menge in $\mathbb{C}$.



nicht zusammenhängende Menge in $\mathbb{C}$.



einfach zusammenhängendes Gebiet



nicht einfach zusammenhängendes Gebiet.

Satz III.8 (Cauchyscher Integralsatz). Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion. Dann gilt für jede in ganz D verlaufende stückweise glatte, geschlossene Kurve γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Mit $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{und} \quad \gamma(t) = x(t) + i\,y(t) \quad t \in [a,b]$$

gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \left[u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t))\right]\left(x'(t) + i\,y'(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt + i\int_a^b u(x(t),y(t))\,y'(t) + v(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$= \int_\gamma u(x,y)\,dx - \int_\gamma v(x,y)\,dy + i\int_\gamma u(x,y)\,dy + i\int_\gamma v(x,y)\,dx$$

(Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^2$)

Nach Voraussetzung ist f holomorph in D.

$\Rightarrow$ u und v besitzen stetige part. Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y in D die dort den Cauchy-Riemannschen Dgl. $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ genügen. Bilden wir das Vektorfeld $K(x,y) = \{v(x,y), u(x,y)\}$ so folgt nach dem Potentialkriterium (oder Integrabilitätskriterium) das ein Potential existiert, denn es gilt $v_y = u_x$ und damit

$$\int_\gamma v\,dx + u\,dy = 0 \qquad (\nearrow \text{Vektoranalysis})$$

Entsprechend folgt für das Vektorfeld $K(x,y) := \{u(x,y), -v(x,y)\}$ wegen dem Integrabilitätskriterium $u_y = -v_x$

$$\int_\gamma u\,dx - v\,dy = 0$$

und damit die Beh. $\blacksquare$