Folgerungen: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, seien z_1 und z_2 beliebige Punkte in D und f sei eine in D holomorphe Funktion. Dann gilt für alle ganz in D verlaufende stückweise glatten Kurven γ_1, γ_2 die z_1 (Anfangspkt.) und z_2 (Endpkt.) verbinden

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

d.h. das Integral über holomorphe Fkt. ist unabhängig vom Weg der z_1 und z_2 verbindet.

Beweis: Es gilt

$$0 = \int_{\gamma_1+\gamma_2^{-1}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^{-1}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

■

Bemerkung: • Wir betrachten $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ – punktierte komplexe Ebene und für γ die positiv orientierte Kreislinie $|z-z_0| = r$, so gilt

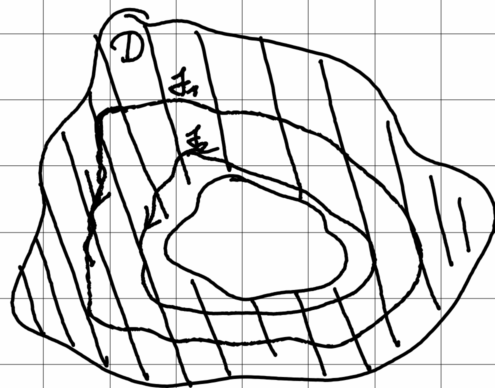
$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \qquad \text{(siehe Beispiel oben)}$$

Die Funktion f ist zwar in D holomorph, aber D ist kein einfach zusammenhängendes Gebiet.

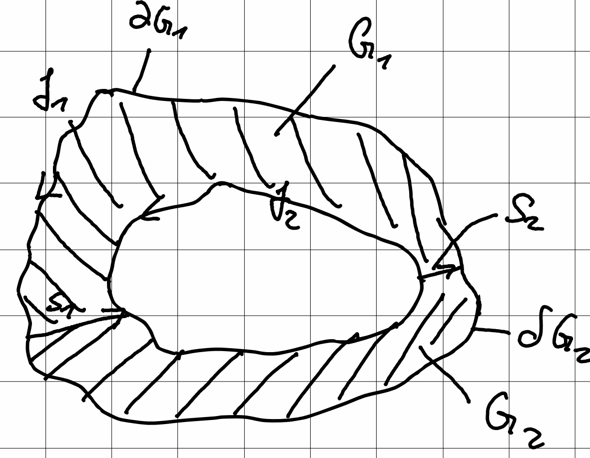
• Verallgemeinerung für mehrfach zusammenhängende Gebiete.

- D sei ein zweifach zusammenhängendes Gebiet
- γ_1, γ_2 geschlossene, doppelpunktfreie, stückweise glatte, positiv orientierte Kurven die in ganz D verlaufen.
- γ_1 liegt im Innern von γ_2 dann gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$



zweifach zusammenhängendes Gebiet



Zerlegung in zwei einfach-zusammenhängende Gebiete

$$\int_{\partial G_1} f(z)\,dz = \int_{\partial G_2} f(z)\,dz = 0$$

Da sich die Integrale über die Verbindungswege S_1 und S_2 wegkürzen gilt

$$0 = \int_{\partial G_1} f(z)\,dz + \int_{\partial G_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^{-1}} f(z)\,dz \quad \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

III. 4. Stammfunktionen im Komplexen

- Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung auf Kurvenintegrale in der komplexen Ebene.

Def.: - Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ heißt <u>Stammfunktion</u> von f, wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt.

- f habe eine <u>lokale Stammfunktion</u> auf D, wenn es zu jedem Pkt. von D eine Umgebung $U \subset D$ gibt, sodass $f|_U$ eine Stammfunktion hat.

Kennt man eine Stammfunktion von f, so kann man Kurvenintegrale über f leicht berechnen.

Satz III. 9: Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt. γ sei ein Integrationsweg in D von z_0 nach z_1. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0).$$

(unabhängig vom Integrationsweg).

Beweis: Es sei $\gamma : [a,b] \to D$ und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung derart, dass $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ stetig diffbar ist $(k = 1, \ldots, n)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} (F\circ\gamma)(t_k) - (F\circ\gamma)(t_{k-1})$$

$$= F(z_1) - F(z_0) \qquad \blacksquare$$

Satz III. 10: Ist f eine stetige Funktion auf D und alle Kurvenintegrale von f sind wegunabhängig in D. Dann ist für festes $z_0 \in D$ durch

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$$

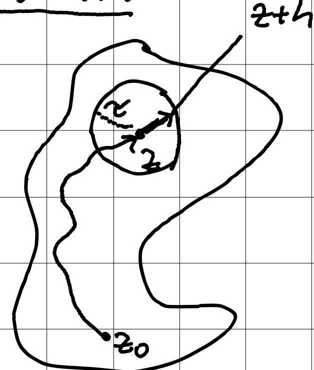
eine Stammfkt. von f in D gegeben, wobei der Integrationsweg irgendeine ganz in D verlaufende stückweise glatte Kurve ist, die z_0 mit z verbindet.

Ist G eine weitere Stammfkt. von f in D, so gilt

$$G(z) = F(z) + C$$

mit einer gewissen Konstanten C.

<u>Beweis:</u>



Parameterdarstellung von $\gamma(h)$:

$$\underset{}{\xi} = \xi(t) = \overset{\in\mathbb{C}}{z} + t\overset{\in\mathbb{C}}{h}$$

$$0 \le t \le 1$$

Wahl des Integrationsweges

$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} f(\xi)\,d\xi = \underbrace{\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi}_{F(z)} + \int_{\gamma(h)} f(\xi)\,d\xi$$

gilt

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\gamma(h)} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\,\xi'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(z+th)\,dt$$

Die Zerlegung

$$\int_0^1 f(z+th)\,dt = \int_0^1 f(z+th) - f(z) + f(z)\,dt$$

$$= f(z) + \int_0^1 \underbrace{f(z+th) - f(z)}_{\substack{\to 0 \text{ für } h \to 0 \\ \text{gleichmäßig}}}\,dt \qquad f \text{ holomorph}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \to f(z) \quad \text{für } h \to 0$$

also

$$F'(z) = f(z) \text{ in } D.$$

Sei G eine weitere Stammfunktion von f, d.h. es gelte $G' = f$ in D.
Mit $u(x,y) := \operatorname{Re}(F-G)$, $v(x,y) := \operatorname{Im}(F-G)$ und den Cauchy-Riemannschen Dgl.

$$F - G = u + iv$$

$$(F-G)' = u_x + i v_x - v_y - i u_y = 0$$

$\Rightarrow u_x = v_y = 0$ und $-v_x = u_y = 0$, d.h. u und v sind in D konstant.
$\Rightarrow G$ kann sich nur durch eine Konstante von F in D unterscheiden.

Die Cauchysche Integralformel

Satz III. 11 (Cauchysche Integralformel)

Sei f eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D holomorphe Funktion. Ferner sei C eine in ganz D verlaufende geschlossene, doppelpunktfreie stückweise glatte und positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes z aus dem Inneren ($z \in \mathrm{In}(C)$)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi,$$

d.h. f ist im Innern von C bereits durch die Funktionswerte auf dem Rand C eindeutig bestimmt.