

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

<http://www.tu-chemnitz.de/~rahi>

Übungsblatt 21 - Hilberträume

Aufgabe 1: Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathcal{H}$ die Abbildung

$$x \mapsto \langle x, y \rangle$$

stetig und linear ist.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und e_n , $n \in \mathbb{N}$ eine orthonormale Menge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

- a) Zu jedem $x \in \mathcal{H}$ existiert eine eindeutige Folge $a_n \in \mathbb{C}$ so dass $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n e_n = x$.
- b) Zu jedem $x \in \mathcal{H}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N > 0$ und Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, \dots, N$ so dass, $\|x - \sum_{n=1}^N a_n e_n\| < \varepsilon$.
- c) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x$.
- d) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$.
- e) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Eine Menge die diese Bedingungen erfüllt heißt Orthonormalbasis des Hilbertraumes $\mathcal{H}$.

Aufgabe 3: Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{H}$ Vektoren in einem Prähilbertraum $\mathcal{H}$ und

$$s = \sum_{n=1}^N a_n x_n, \quad a_n \in \mathbb{C}, n = 1, \dots, N.$$

Zeigen Sie: s ist genau dann die beste Approximation an ein $x \in \mathcal{H}$, d.h., $\|x - s\| \leq \|x - t\|$ für alle

$$t = \sum_{n=1}^N b_n x_n, \quad b_n \in \mathbb{C}, n = 1, \dots, N,$$

falls für alle $n = 1, \dots, N$ gilt $\langle s - x, x_n \rangle = 0$.

Aufgabe 4: Betrachten Sie den Prähilbertraum $C(-1, 1)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)\overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

und bestimmen Sie das Polynom $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$ welches den Abstand $\|f - p\|$ zu der Funktion $f(x) = |x|$ minimiert.

Hausaufgaben

Abgabe Do, 19.05.2016 bzw. Fr, 20.05.2016

Aufgabe 1: Betrachten Sie den Folgenraum

5 Punkte

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

a) Zeige Sie, dass ℓ_2 versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

ein Hilbertraum ist.

b) Bestimmen Sie eine Hilbertraumbasis in ℓ_2 .

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $S: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $y = S(x)$, $y_n = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ stetig, linear, surjektiv aber nicht injektiv ist.

d) Finden Sie eine stetige lineare Abbildung $S: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass der Raum $C(a, b)$ versehen mit dem Skalarprodukt

2 Punkte

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

kein Hilbertraum ist.

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und e_n , $n \in \mathbb{N}$ eine orthogonale Menge. Zeigen Sie: 1 Punkt
Für jedes Element $\mathcal{H} \ni x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n$ die Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \|e_n\|^2.$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie den Prähilbertraum $C(0, 1)$ mit dem Skalarprodukt

2 Punkte

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx$$

und bestimmen Sie das Polynom $p(x) = a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$ welches den Abstand $\|f - p\|$ zu der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ minimiert.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe): Lösen Sie Aufgabe 4 in dem Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf Basissystem $1, x, x^2$ anwenden und Satz 11.7. aus der Vorlesung benutzen. 2 Punkte