

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

<http://www.tu-chemnitz.de/~rahi>

Übungsblatt 25 - Differentiation in $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Berechnen die Länge des Graphen von f .

Aufgabe 2: Sei $F: [0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = F(\|x\|_2).$$

- a) Berechnen Sie den Gradienten von f , sowie die Richtungsableitungen von f in Richtung $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\|\xi\| = 1$.
- b) Untersuchen Sie, unter welchen Voraussetzungen an F ist f differenzierbar?

Aufgabe 3: Überprüfen Sie die Aussage des Satzes von Schwarz für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Aufgabe 4: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie, dass für beliebige Punkte $a, b \in U$ und einen beliebigen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ gilt

$$F(b) = F(a) + \int_0^1 \langle \dot{\gamma}(t), \nabla F(\gamma(t)) \rangle dt.$$

Aufgabe 5: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ welches wegunabhängig integrierbar ist, d.h. für alle $a, b \in U$, welche über einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ verbunden werden können, ist das Integral

$$\int_0^1 \langle \dot{\gamma}(t), f(t) \rangle dt$$

unabhängig von der konkreten Wahl des Weges γ . Zeigen Sie:

- a) Das Vektorfeld f besitzt eine Stammfunktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, für welche gilt $\nabla F = f$.
- b) Ist das Vektorfeld f zusätzlich differenzierbar so gilt $\partial_i f_k = \partial_k f_i$, $i, k = 1, \dots, n$.

Aufgabe 6: Betrachten Sie das Vektorfeld $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -y \end{pmatrix}$ und berechnen Sie die zugehörige Stammfunktion.

Hausaufgaben

Abgabe Di, 28.06.2016 bzw. Fr, 01.07.2016

Aufgabe 1: Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen

3 Punkte

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x) = (3x^2, \sin 3x, 42, \cos^2 x)^T,$
- b) $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (4x^2y^3, xye^z, e^{xy})^T,$
- c) $h: (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y, z) = \sin(zx) \ln(x + y^2).$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ stetig und partiell differenzierbar ist, aber nicht total differenzierbar ist.

2 Punkte

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = -x^2 + 2xy - y^3$ und berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $\tilde{f}(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ in den Polarkoordinaten r, φ .

2 Punkte

Aufgabe 4: Berechnen Sie mit Hilfe der Definition das totale Differential der Funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$.

2 Punkte