

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

MATHEMATIK für Medieninformatik

Prof. Dr. Elena Klimova

Wintersemester 2024

Kapitel 2

Lineare Algebra

Prof. Dr. Elena Klimova

Wintersemester 2024

Lernziele dieses Kapitels

- ▶ In diesem Kapitel lernen Sie Grundlagen der linearen Algebra kennen. Im Mittelpunkt stehen dabei die folgenden mathematischen Objekte: Vektoren und Matrizen.
- ▶ Im ersten Teil dieses Kapitels lernen Sie, ...
 - wie und unter welchen Voraussetzungen Sie Matrizen addieren, multiplizieren, transponieren und invertieren können,
 - was es mit Determinanten auf sich hat und an welcher Stelle diese nützlich sind.
- ▶ Im zweiten Teil des Kapitels beschäftigen wir uns mit Anwendungen der Matrizenrechnung:
 - Wir betrachten lineare Gleichungssysteme und verknüpfen die Berechnung ihrer Lösung mit der Matrizenrechnung.
 - Wir lernen, wie Eigenwerte und Eigenvektoren Vektorräume mit Matrizen verbinden.
 - In einem kleinen Exkurs steigen wir in die Graphentheorie ein.

Inhalt

von Kapitel 2: Lineare Algebra

Matrizen & Determinanten

Matrizen

Matrixoperationen

Determinanten

Vektorräume

Anwendungen von Matrizen

Lineare Gleichungssysteme

Eigenwertprobleme

Exkurs: Graphentheorie

Bäume und kürzeste Wege

Bäume

Wurzelbäume

Matrizen

Definition

Definition (Matrix)

Eine **Matrix** A vom Typ (m, n) über \mathbb{K} ist eine Anordnung von $m \cdot n$ Elementen aus \mathbb{K} in m Zeilen und n Spalten.

Bemerkungen

- ▶ Man schreibt allgemein

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m,n)}.$$

- ▶ Die Elemente von \mathbb{K} werden **skalare** Größen genannt. Oft ist $\mathbb{K} := \mathbb{R}$.

Matrizen

Beispiele

$$1. A \in \mathbb{R}^{(2,4)} : A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2. B \in \mathbb{R}^{(4,1)} : B := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3. C \in \mathbb{K}^{(1,1)} : C := (c)$$

$$4. D \in \mathbb{K}^{(1,n)} : D := (d_{11} \quad d_{12} \quad \cdots \quad d_{1n}) \text{ Zeilenvektor der Länge } n$$

$$5. E \in \mathbb{K}^{(m,1)} : E := (e_{11} \quad e_{21} \quad \cdots \quad e_{m1})^\top \text{ Spaltenvektor der Länge } m$$

$$6. \text{ Für } m = n, F \in \mathbb{K}^{(n,n)} : F := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

F ist eine **quadratische Matrix** der Ordnung n .

Matrizen

Spezielle Matrizen

1. Nullmatrix: $\mathbf{O}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1,2)}$
2. Einheitsmatrix der Ordnung 2: $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$

Allgemein: **Einheitsmatrix der Ordnung n :**

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Matrixoperationen

Gleichheit von Matrizen

Definition (Gleichheit)

Es seien zwei Matrizen A und B gegeben. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und $B \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt sind.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrixoperationen

Rechenoperationen

1. Addition:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} =$$

2. Skalare Multiplikation:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

Matrixoperationen

Rechenoperationen

3. Transposition:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T =$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T =$$

4. Negative Matrix:

$$-A = (-1) \cdot A$$

5. Differenz von A und B , falls $A, B \in \mathbb{K}^{(m,n)}$:

$$A - B = A + (-B)$$

Matrixoperationen

Rechenregeln

Satz (Rechenregeln für Matrizen)

Es seien die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und die skalaren Größen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gelten folgende Rechenregeln:

(R1) Assoziativgesetz (Addition): $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(R2) Kommutativgesetz (Addition): $A + B = B + A$.

(R3) $A + \mathbf{0} = A$, $A - A = \mathbf{0}$, $-(-A) = A$.

(R4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
 $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(R5) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \mathbf{0}$.

(R6) $(A^\top)^\top = A$.

(R7) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.

(R8) $(\alpha \cdot A)^\top = \alpha \cdot A^\top$.

Matrixoperationen

Matrixmultiplikation

Beispiele

$$(a) \quad A := (1 \quad 2 \quad 3), \quad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = (1 \quad 2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

Matrixoperationen

Matrixmultiplikation

Beispiele

$$(b) \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

Matrixoperationen

Matrixmultiplikation

Beispiele

$$(b^*) \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

Matrixoperationen

Matrixmultiplikation

Beispiele

$$(c) \quad F := \begin{pmatrix} -16 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot G = \begin{pmatrix} -16 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} =$$

Matrixoperationen

Matrixmultiplikation

Beispiele

$$(c^*) \quad G \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Matrixoperationen

Matrixmultiplikation

Bemerkung

Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$, d.h. die Matrixmultiplikation ist (auch bei passendem Typ) **nicht** kommutativ.

Matrixoperationen

Rechenregeln

Satz (Rechenregeln für Matrizen – Fortsetzung)

Es seien die Matrizen passenden Typs A , B und C sowie die skalare Größe $\alpha \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gelten folgende Rechenregeln:

$$(R9) \quad \text{Assoziativgesetz (Multiplikation):} \quad (AB)C = A(BC).$$

$$(R10) \quad \text{Falls } A \in \mathbb{K}^{(n,n)} : \quad E_n \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A.$$

$$(R11) \quad \text{Distributivgesetz:}$$

$$A \cdot (B + C) = AB + AC \quad \text{und} \quad (B + C) \cdot A = BA + CA.$$

$$(R12) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

$$(R13) \quad (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Matrixoperationen

Inverse Matrix

Definition (Inverse Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ heißt **invertierbar** (oder **regulär**), wenn gilt:

$$\exists B \in \mathbb{K}^{(n,n)} : A \cdot B = B \cdot A = E_n.$$

Die Matrix B heißt **inverse Matrix von A** , geschrieben $B := A^{-1}$.

- ▶ Nur quadratische Matrizen können eine Inverse besitzen.
- ▶ Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Ist also eine quadratische Matrix nicht invertierbar, so heißt sie **singulär**.

Matrixoperationen

Berechnung der inversen Matrix

Gegeben: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Gesucht: A^{-1} .

GAUSS-JORDAN-Algorithmus

Ziel: Forme das untenstehende Schema durch *elementare Zeilenumformungen* so um, dass links die Einheitsmatrix entsteht. Auf der rechten Seite steht dann A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

Matrixoperationen

Berechnung der inversen Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

Matrixoperationen

Matrizengleichung

Aufgabe

Lösen Sie die Gleichung $A \cdot X + B = C$ für die folgenden gegebenen Matrizen A , B und C :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrixoperationen

Matrizengleichung

Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man in der Aufgabenstellung X und A vertauscht? D.h. gesucht sei nun \tilde{X} in

$$\tilde{X} \cdot A + B = C.$$

Matrixoperationen

Matrizengleichung

Bemerkung

Matrixmultiplikation ist **nicht** kommutativ! Die Richtung der Multiplikation beim Auflösen einer Matrizengleichung nach X ist also essentiell!

Determinanten

Einleitendes Beispiel

Es sei folgende Tabelle (Matrix) gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun eine (reelle) Zahl, wir nennen sie *Determinante*, die eine Eigenschaft der gegebenen Matrix sein soll. Man schreibt:

$$|A| := \det(A) := \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

Wie berechnet sich die Determinante der obigen Matrix A ?

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} =$$

Allgemein gilt also für die Determinante 2. Ordnung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

Wie berechnet sich dann die Determinante 3. Ordnung von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ?$$

(1) Dreiecksmatrix:

$$(1a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(1b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

(2) Regel von SARRUS:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

(3) Rekursive Formel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

Determinanten

Einleitendes Beispiel

(4) Kombination aus **Umformungen** & eine der Regeln (1) – (3)

Mögliche Umformungen:

(4a) Ausklammern eines Faktors aus einer Zeile oder Spalte

(4b) Addition eines Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

Determinanten

Entwicklungssatz

Satz (LAPLACE'scher Entwicklungssatz nach i -ter Zeile)

Für die Berechnung der Determinante einer $(3,3)$ -Matrix A gilt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+i} a_{ik} \det \underbrace{(U_{ik}(A))}_{\text{Untermatrix}}.$$

Determinanten

Beispiele

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix} =$$

Determinanten

Beispiele

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

Vektoren

Einführung

Die **Vektoren** $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

repräsentieren jeweils einen Punkt des entsprechenden Raumes \mathbb{R}^n .

Graphische Interpretation:

Pfeil vom Koordinatenursprung bis zu diesem Punkt.

- ▶ Ein Vektor ist durch seine Länge bzw. **Norm** $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
sowie seine Richtung bestimmt.
- ▶ Die **Richtung** wird durch die mit den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel definiert:

$$\varphi_i = \arccos \left(\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} \right).$$

Vektorräume

Definition

Definition (Vektorraum)

Die Menge $V := \mathbb{R}^2$ bzw. $V := \mathbb{R}^3$ bildet zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ einen **Vektorraum**.

Schreibweise: $(V, +, \cdot)$.

Vektorraumaxiome (Rechenregeln)

- Vektoraddition ($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$):

$$(V1) \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w},$$

$$(V2) \quad \exists \mathbf{0} \in V:$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

$$(V3) \quad \exists -\mathbf{v} \in V:$$

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

$$(V4) \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}.$$

- Multiplikation mit einem Skalar

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}):$$

$$(S1) \quad \alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\alpha \cdot \mathbf{v}) + (\alpha \cdot \mathbf{w}),$$

$$(S2) \quad (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = (\alpha \cdot \mathbf{v}) + (\beta \cdot \mathbf{v}),$$

$$(S3) \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}),$$

$$(S4) \quad \alpha = 1 : 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Vektoren und Vektorprodukte

Skalarprodukt

Definition (Skalarprodukt)

Das **Skalarprodukt**

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ist ein spezielles Matrizenprodukt (siehe oben). Es ist für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definiert und liefert immer eine reelle Zahl.

Bemerkung

Es gilt: $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\varphi)$, wobei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Folglich gilt für φ :

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \right).$$

Vektoren und Vektorprodukte

Skalarprodukt – Beispiele

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\| = 2, \quad \|\mathbf{y}\| = 5, \quad \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 60^\circ$$

Vektoren und Vektorprodukte

Kreuzprodukt (auch: Vektorprodukt)

Definition (Kreuzprodukt)

Das **Kreuzprodukt** (auch **Vektorprodukt**) zweier dreidimensionaler Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor $\mathbf{z} := \mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, dessen Länge gleich der Fläche des von den Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} aufgespannten Parallelogramms ist, d.h.

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin(\varphi).$$

Der Vektor \mathbf{z} steht senkrecht auf den Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} .
Das Kreuzprodukt berechnet sich wie folgt:

$$\mathbf{z} := \mathbf{x} \times \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Vektoren und Vektorprodukte

Kreuzprodukt – Beispiele

Bemerkung

- ▶ Der Vektor $\mathbf{z} = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ ist so orientiert, dass \mathbf{x} , \mathbf{y} und $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem** bilden (*Rechte-Hand-Regel*).

Beispiele

Vektorräume

Norm

- ▶ Im Folgenden beschäftigen wir uns mit weiteren abstrakten Eigenschaften von Vektorräumen, die wir am Beispiel der uns am besten vertrauten reellen Vektorräume veranschaulichen wollen.
- ▶ Wir wissen bereits, dass Vektoren im \mathbb{R}^n nicht nur durch ihre Richtung charakterisiert werden, sondern auch durch ihre Länge. Ganz allgemein bezeichnet die *Länge* eines Vektors folgender Begriff:

Vektorräume

Norm

Definition (Norm)

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0; \infty), \quad v \mapsto \|v\|$$

heißt **Norm**, wenn sie die folgenden *Axiome* erfüllt:

(N1) *Definitheit*: $\|v\| = 0 \implies v = 0$,

(N2) *Absolute Homogenität*: $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall v \in V : \|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$,

(N3) *Dreiecksungleichung*: $\forall v \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

- ▶ Der Name *Dreiecksungleichung* stammt tatsächlich vom Dreieck: Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist immer größer als die Länge der dritten Seite.

Vektorräume

Euklidische Norm

- ▶ Auf einem reellen Vektorraum definiert man die **Euklidische Norm** (auch: Betrag eines Vektors) als:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \quad \|v\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

- ▶ Das ist nichts anderes als der Satz des Pythagoras im \mathbb{R}^n .
- ▶ Manchmal setzt man als Index an die Euklidische Norm noch eine 2 ($\|\cdot\|_2$), um anzudeuten, dass es sich dabei um eine *Quadrierung* der Vektoreinträge und das Ziehen der *Quadratwurzel* handelt.
- ▶ Allgemein definiert man die p -Norm so:

$$\|v\|_p := \left(\sum_{i=1}^n v_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- ▶ Für $p \rightarrow \infty$ erhält man die sogenannte *Maximumsnorm*.

Maximumsnorm

Aufgabe

Aufgabe (Maximumsnorm)

Zeigen Sie, dass die **Maximumsnorm** $\|\cdot\|_{\max}$ definiert als

$$\|v\|_{\max} := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \quad (= \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\})$$

die Normaxiome (N1) und (N2) erfüllt ((N3) ist schwieriger). Wie sieht der Einheitskreis im \mathbb{R}^2 (= Kreis um den Ursprung) unter dieser Norm aus?

Maximumsnorm

Aufgabe – Lösung

Aufgabe (Maximumsnorm – Lösung)

Zeigen Sie, dass die **Maximumsnorm** $\|\cdot\|_{\max}$ definiert als

$$\|v\|_{\max} := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \quad (= \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\})$$

die Normaxiome (N1) und (N2) erfüllt ((N3) ist schwieriger). Wie sieht der Einheitskreis im \mathbb{R}^2 (= Kreis um den Ursprung) unter dieser Norm aus?

Lösung

$$(N1) \quad \|v\|_{\max} = 0 \implies \max_i \{|v_i|\} = 0 \implies \forall i : v_i = 0 \implies v = 0.$$

$$(N2) \quad \|\alpha \cdot v\|_{\max} = \max_i \{|\alpha \cdot v_i|\} = \max_i \{|\alpha| \cdot |v_i|\} = |\alpha| \cdot \max_i \{|v_i|\} = |\alpha| \cdot \|v\|_{\max}.$$

Maximumsnorm

Aufgabe – Lösung

- ▶ Der Einheitskreis ist gerade ein Quadrat mit der Kantenlänge 2 und dem Schwerpunkt $(0, 0)$.

Abbildung: Einheitskreise der p -Norm im \mathbb{R}^2 für unterschiedliche p

Vektorräume

Linearkombinationen von Vektoren

- ▶ Wir wissen, dass der \mathbb{R}^2 ein 2-dimensionaler Vektorraum ist. Doch was bedeutet das Wort *Dimension* eigentlich genau?
- ▶ Im \mathbb{R}^2 könnte man sagen, dass die Dimension die Anzahl der Einträge in einem Spaltenvektor $v \in \mathbb{R}^2$ ist – nämlich genau 2 Stück. Aber wie ist das dann im oben erwähnten Vektorraum der stetigen Funktionen? Da gibt es gar keine Spaltenvektoren, aber trotzdem hat auch dieser Vektorraum eine Dimension (Spoiler: Sie ist ∞ .)
- ▶ Es muss also noch eine andere Möglichkeit geben, um den Begriff der *Dimension* zu definieren.

Vektorräume

Dimension

- ▶ Den \mathbb{R}^2 stellen wir uns ja normalerweise als zweidimensionales Koordinatensystem vor. Die Koordinatenachsen werden in diesem Raum von den Vektoren $(1, 0)^\top$ und $(0, 1)^\top$ repräsentiert. Man kann nun jeden anderen Punkt in dem Raum darstellen als Summe dieser beiden Vektoren, jeweils multipliziert mit einem Skalar. Also z.B.:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Frage: Lässt sich jeder beliebige Vektor im \mathbb{R}^2 als Summe dieser beiden *Basisvektoren* multipliziert mit zwei Skalaren aus \mathbb{R} darstellen oder gibt es einen Fall, in dem noch ein dritter solcher Vektor benötigt wird?

Vektorräume

Linearkombinationen von Vektoren

Definition (Linearkombination)

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $v_1, \dots, v_m \in V$ Vektoren und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ beliebige Skalare. Dann heißt

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$$

Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$.

Vektorräume

Linearkombinationen von Vektoren

Aufgabe (Linearkombination)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (2, 1)^\top$ und $v_2 = (-2, 2)^\top$. Lässt sich $b = (1, 5)^\top$ als Linearkombination aus v_1 und v_2 schreiben?

Vektorräume

Linearkombinationen von Vektoren

Lösung

- ▶ Gesucht sind also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Das ist nichts anderes als das LGS

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 5 \end{array}$$

- ▶ Auflösung führt zu $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.
- ▶ Probe: Einsetzen!

Vektorräume

Lineare Unabhängigkeit

Definition (Lineare Unabhängigkeit)

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ die einzige Möglichkeit ist, um die Vektorgleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

zu lösen, so nennt man die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_m **linear unabhängig**.
Andernfalls heißen die Vektoren **linear abhängig**.

Beachte: Der Nullvektor ist per Definition linear abhängig.

Satz (Lineare Abhängigkeit)

Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sind *linear abhängig* genau dann, wenn sich (irgend-)einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen schreiben lässt.

Vektorräume

Lineare Unabhängigkeit

- ▶ Nach dem letzten Satz sind die Vektoren $(2, 1)^T$, $(-2, 2)^T$ und $(1, 5)^T$ aus unserer obigen Aufgabe also linear abhängig.

Aufgabe (Lineare Unabhängigkeit)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Lösen Sie dazu das LGS

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und prüfen Sie, ob $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige mögliche Lösung ist.

Vektorräume

Basis & Dimension

- ▶ Die beiden letzten Aufgaben haben uns gezeigt, dass Vektoren linear abhängig oder unabhängig sein können.
- ▶ Im \mathbb{R}^3 können, wie wir gesehen haben, drei Vektoren linear unabhängig sein. Aber geht das auch mit vier Vektoren?
- ▶ Man kann sich also folgende Frage stellen:
Wie groß ist denn die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum?
- ▶ Die Antworten auf diese Frage liefert der folgende Satz.

Vektorräume

Basis & Dimension

Satz (Basis)

Eine maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ wird das **Basis** des Vektorraumes V bezeichnet. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich als Linearkombination

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

dieser Basisvektoren schreiben.

Die Anzahl der Vektoren in der Basis wird als **Dimension** des Vektorraumes V bezeichnet, kurz: $\dim(V)$.

Die Koeffizienten $\lambda_j \in \mathbb{K}$ sind *eindeutig* bestimmt und werden als **Entwicklungskoeffizienten** oder **Koordinaten** von v bezüglich der Basis bezeichnet.

Vektorräume

Basis & Dimension

- ▶ Die Dimension muss nicht endlich sein, es gibt auch unendlichdimensionale Vektorräume, wie z.B. den der stetigen Funktionen auf \mathbb{R} .
- ▶ Im \mathbb{R}^2 wäre eine mögliche Basis die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ der Einheitsvektoren (also der Koordinatenachsen). Diese Basis nennt man **Standardbasis** oder **kanonische Basis**.
- ▶ Alternativ könnte man aber auch jede andere Menge bestehend aus zwei linear unabhängigen Vektoren des \mathbb{R}^2 als Basis des \mathbb{R}^2 definieren.
- ▶ In diese Richtung geht der nun folgende Satz, der für endlichdimensionale Vektorräume gilt.

Vektorräume

Basis & Dimension

Satz

Für einen n -dimensionalen Vektorraum ist jede Menge mit n linear unabhängigen Vektoren eine Basis. Umgekehrt hat jede Basis genau n Vektoren.

Jede Menge mit weniger als n linear unabhängigen Vektoren kann durch Hinzunahme weiterer linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis ergänzt werden.

Vektorräume

Aufgabe

Aufgabe (Basis)

Aus der Aufgabe über lineare Unabhängigkeit wissen wir, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und damit eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Bestimmen Sie nun die *Koordinaten* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von $(1, -10, 4)^\top$ bezüglich dieser Basis.

Hinweis: Es ist also das LGS

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Lösung: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}.$

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Determinanten, Matrizen und Vektoren)

1. Nachdem Sie die Voraussetzungen geprüft haben, führen Sie sowohl **Addition** als auch **Multiplikation** an gegebenen Matrizen durch.
2. Sie geben Bedingungen an, unter denen Matrizen **invertiert** werden können, und berechnen die inverse Matrix mittels Formel im Fall einer $(2, 2)$ -Matrix oder mit dem **Gauß-Jordan-Algorithmus** für höherdimensionale Matrizen.
3. Sie lösen eine **Matrixgleichung** nach der Unbekannten auf. Dabei beachten Sie, dass die Existenz inverser Matrizen gesichert sein muss, und dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.
4. Sie charakterisieren einen **Vektor** durch seinen **Betrag** und seine **Richtung**.
5. Sie bilden verschiedene **Produkte** von Vektoren und bestimmen, ob das Ergebnis ein Vektor oder ein Skalar ist.

Inhalt

von Kapitel 2: Lineare Algebra

Matrizen & Determinanten

Matrizen

Matrixoperationen

Determinanten

Vektorräume

Anwendungen von Matrizen

Lineare Gleichungssysteme

Eigenwertprobleme

Exkurs: Graphentheorie

Bäume und kürzeste Wege

Bäume

Wurzelbäume

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele

$$(a) \quad \begin{array}{rclclcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 8 \end{array} .$$

In Matrixnotation:

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiele

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In herkömmlicher Schreibweise:

Lineare Gleichungssysteme

Allgemeine Definition

Allgemein schreibt man ein lineares Gleichungssystem (LGS) wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

a_{ij} heißen **Koeffizienten** des LGS,

b_i heißen **Störglieder** des LGS.

Lineare Gleichungssysteme

Allgemeine Definition – Matrixschreibweise

Ein LGS lässt sich wie folgt in **Matrixschreibweise** überführen:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\text{mit } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Lineare Gleichungssysteme

Homogene und inhomogene LGS

Definition

Ein LGS heißt **homogen**, falls für die rechte Seite $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ gilt.

Andernfalls heißt das LGS **inhomogen**.

Lösungsverhalten

Homogenes LGS	Inhomogenes LGS
entweder genau eine Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (triviale Lösung) oder unendlich viele Lösungen (darunter auch die triviale Lösung)	entweder genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen oder keine Lösung

Lineare Gleichungssysteme

Lösen eines LGS

Der Gauß'sche Algorithmus

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Definition (Elementare Zeilenumformungen)

1. Vertauschung zweier Zeilen,
2. Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$,
3. Addition (eines Vielfachen) einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele (Gauß-Algorithmus)

$$(a) \quad \begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & 5x_2 & = & -4 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme

Einschub – Rang

Eine Matrix \mathbf{D} sei mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus in eine gestaffelte Matrix überführt. Die Anzahl der Zeilen in der gestaffelten Matrix, die von Null verschiedene Elemente enthalten, heißt **Rang** der Matrix \mathbf{D} . Bezeichnung: $r(\mathbf{D})$.

Satz (Rangkriterium)

Ein LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit n Unbekannten ist genau dann **lösbar**, wenn gilt:

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

- (1) $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n \Rightarrow$ LGS besitzt **genau eine** Lösung.
- (2) $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n \Rightarrow$ LGS besitzt **unendlich viele** Lösungen, die von $n - r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ freien Parametern abhängen.

Ein LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist genau dann **nicht lösbar**, wenn gilt:

$$r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele (Gauß-Algorithmus)

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele (Rangkriterium)

$$(c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Lineare Gleichungssysteme)

1. Sie überführen ein lineares Gleichungssystem (LGS) in **Matrixform** und vice versa.
2. Sie benennen den Unterschied zwischen **homogenen** und **inhomogenen** LGS und treffen Aussagen über das Lösungsverhalten.
3. Sie wenden **elementare Zeilenumformungen** auf die **erweiterte Koeffizientenmatrix** eines LGS an.
4. Nachdem Sie ein LGS in eine gestaffelte Matrix überführt haben, geben Sie die **Lösungsmenge** des LGS in Vektorschreibweise an. Dabei erkennen Sie, wie viele Lösungen das LGS besitzt.
5. Sie überprüfen die Lösbarkeit eines LGS mittels **Rangkriterium**.

Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Motivation

Wie die Google-Gründer Larry Page und Sergey Brin mit simpler Mathematik Milliardäre wurden...

Eigenwertprobleme

Betrachte die Gleichung $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eigenwertprobleme

Definition

Definition (Eigenwert und Eigenvektor)

Ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$, für den es mindestens eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ des linearen Gleichungssystems

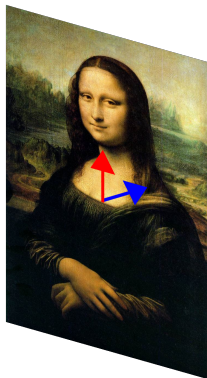
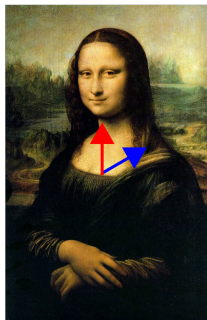
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

gibt, heißt **Eigenwert** der Matrix \mathbf{A} . Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der dieses lineare Gleichungssystem erfüllt, heißt **Eigenvektor** der Matrix \mathbf{A} .

- ▶ Ein **Eigenvektor** einer linearen Abbildung ist in der linearen Algebra also ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dessen Richtung durch die Abbildung *nicht* verändert wird.
- ▶ Ein Eigenvektor wird also nur **skaliert** und man bezeichnet den Skalierungsfaktor als **Eigenwert** der Abbildung.

Eigenwertprobleme

Bedeutung



In dieser **Scherung** der Mona Lisa wurde das Bild so verformt, dass der rote Vektor seine Richtung (entlang der vertikalen Achse) nicht geändert hat, der blaue Vektor jedoch schon. Der rote Vektor ist also ein **Eigenvektor** der Scherabbildung, der blaue Vektor aufgrund seiner Richtungsänderung nicht. Da der rote Vektor nicht skaliert wird, ist sein **Eigenwert** 1.

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Eigenwertproblem>

Eigenwertprobleme

Quiz

Quiz

Welcher der drei Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = 1$?

(a) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(b) $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(c) $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Eigenwertprobleme

Charakteristisches Polynom

Es ist also das lineare Gleichungssystem $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zu lösen. Unter welchen Bedingungen gibt es nichttriviale Lösungen?

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) =$$

Eigenwertprobleme

Beispiel – Berechnung Eigenwert und Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}.$$

Eigenwertprobleme

Beispiel – Berechnung Eigenwert und Eigenvektor

Eigenwertprobleme

Beispiel – Berechnung Eigenwert und Eigenvektor

Lösung

Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörige Eigenvektor lautet

$$x_1 = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$ gehörige Eigenvektor lautet

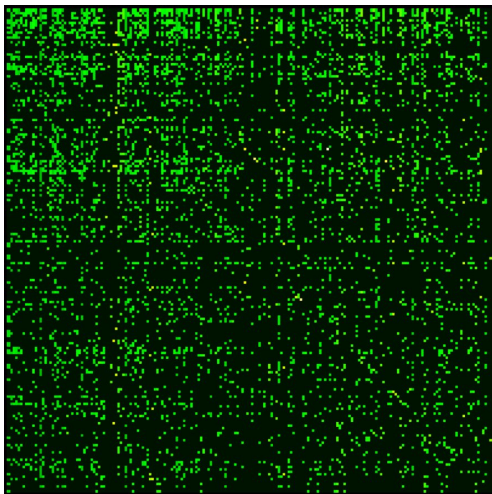
$$x_2 = \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bemerkung

Der durch die beiden Eigenvektoren x_1 und x_2 aufgespannte **Eigenraum** ist ein **Untervektorraum** von \mathbb{R}^2 .

Eigenwertprobleme

Google-Matrix (Ausschnitt)



Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Google-Matrix>

Eigenwertprobleme

Google-Matrix

- ▶ Die **Google-Matrix \mathbf{P}** ist eine quadratische Matrix, die bei der Konstruktion des *PageRank*-Algorithmus entsteht.
- ▶ Der **PageRank**-Algorithmus dient dazu, eine Menge verlinkter Dokumente, z.B. das WWW, anhand ihrer Struktur zu bewerten und zu gewichten.
- ▶ Da die Google-Matrix **\mathbf{P}** oftmals sehr groß ist (viele Millionen Zeilen und Spalten), sind die numerischen und algebraischen Eigenschaften dieser Matrix für die schnelle und exakte Bestimmbarkeit der PageRanks von großer Bedeutung.
- ▶ Zur Berechnung des PageRanks ist man insbesondere an den Eigenvektoren der Matrix **\mathbf{P}^T** zum Eigenwert 1 interessiert...

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Eigenwertprobleme)

1. Sie bestimmen das **charakteristische Polynom** einer quadratischen Matrix.
2. Sie berechnen alle **Eigenwerte** einer Matrix.
3. Unter Verwendung der Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme berechnen Sie die zu den Eigenwerten gehörigen **Eigenvektoren**.

Exkurs: Graphentheorie

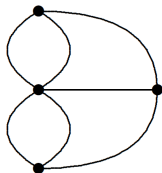
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einem sehr anschaulichen Teilgebiet der Mathematik, das in vielen Bereichen – von Algebraischer Zahlentheorie bis zu Optimierung und Modellierung – eine breite Anwendung erfährt: Graphentheorie.

- ▶ Sie lernen, dass ein Graph nicht nur eine „Visualisierung“ einer Funktion sein kann, sondern hier ein Objekt bestehend aus Knoten und Kanten ist, das man bequem in Matrixform abspeichern kann.
- ▶ Sie lernen verschiedene grundlegende Eigenschaften von Graphen und stets anwendungsbezogene Beispiele (z.B. Probleme von Fremdenführerinnen in Städten mit Brücken, Schneepflugfahrern, Müllmännern und Postbotinnen, sowie Navigationssystemen) kennen.

Graphentheorie

Motivation

Das unten als *Graph* abgebildete Straßensystem soll von Schnee befreit werden. Die Kanten sind die Straßen, die Knoten Straßenkreuzungen. Gibt es eine optimale Tour für die Schneepflugfahrerin, bei der sie jede Straße genau einmal entlang fährt und am Ende wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt?



- ▶ Diese Aufgabe werden wir später lösen und dann mit Ihren Antworten vergleichen.

Graphentheorie

Motivation

Anwendungsgebiete

- ▶ Informationstechnologie, Kommunikationstechnologie
- ▶ Routen- und Projektplanung

Mögliche Fragestellungen

1. Wie können Nachrichten effizient von Sender zu Empfänger gelangen?
2. Wo sollen neue Straßen gebaut werden, um Verkehrsfluss zu verbessern oder Wegstrecken zu minimieren?
3. Welche Fahrtroute ist optimal, um von A nach B zu gelangen?

Graphentheorie erlangt aufgrund der Modellierung von komplexen Problemen an Bedeutung.

Fragestellungen

Beispiel

Gegeben sei ein Straßennetz, das die Orte a, b, c, d und e miteinander verbindet. Es gibt insgesamt 8 Straßen:

Zwischen a und b , a und c , a und d , b und c , b und d , c und d , c und e , sowie d und e . Man könnte die Straßen angeben als

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}.$$

Erinnerung: Bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Nennung an, d.h. $\{a, b\} = \{b, a\}$, bzw. die Straße zwischen a und b kann in beide Richtungen befahren werden.

Wie sieht ein dazugehöriger Graph aus?

Fragestellungen

Lösung

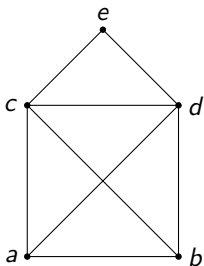


Abbildung: Das Haus vom Nikolaus.

Graphen

Definition

Definition (Graph)

Ein **Graph** $G(V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V mit **Knoten** (engl. *vertex*) und einer Menge E von **Kanten** (engl. *edge*) $\{a, b\}$ mit $a, b \in V, a \neq b$.

Bemerkungen

- ▶ Eine Kante $\{a, b\}$ verbindet also immer zwei Knoten a und b . Kurz schreibt man ab ($= ba$) statt $\{a, b\}$.
- ▶ Ein Graph mit $H(V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ heißt **Teilgraph von G** . Ein Teilgraph H entsteht also, indem man Knoten oder Kanten von G entfernt.

Graphen

Beispiel

Aufgabe

Stellen Sie den Graphen $G(V, E)$ mit den Knoten $V := \{a, b, c, d\}$ und den Kanten $E := \{ab, ac, ad, bc, bd\}$ graphisch dar.

Graphen

Beispiel

Aufgabe

Stellen Sie den Graphen $G(V, E)$ mit den Knoten $V := \{a, b, c, d\}$ und den Kanten $E := \{ab, ac, ad, bc, bd\}$ graphisch dar.

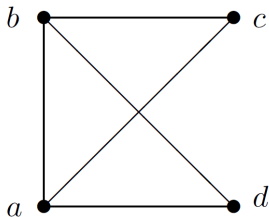


Abbildung: Eine Darstellungsmöglichkeit.

Graphen

Beispiel

Frage: Kann man den obigen Graphen so zeichnen, dass sich seine Kanten nicht kreuzen?

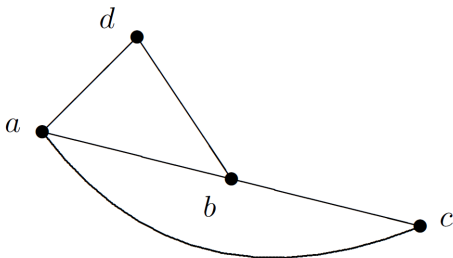


Abbildung: Ein zum obigen Graphen *isomorph* (s.u.) planarer Graph.

Graphen

Eigenschaften

Definition (Eigenschaften von Graphen)

- ▶ Graphen, für die eine Darstellung ohne kreuzende Kanten existiert, heißen **planar**.
- ▶ Wenn zwei Knoten durch eine Kante miteinander verbunden sind, so heißen die Knoten **adjazent** oder auch **benachbart**.
- ▶ Kanten, die einen gemeinsamen Endknoten haben, heißen **inzident**.
- ▶ Ebenso heißen eine Kante und ein Knoten **inzident**, wenn der Knoten Endpunkt der Kante ist.
- ▶ Der **Grad** $\deg(a)$ eines Knotens a ist die Anzahl der Kanten, die inzident zu dem Knoten sind.
- ▶ Ein Knoten a heißt **isoliert**, wenn für seinen Grad $\deg(a) = 0$ gilt.

Graphen

Multigraphen

Frage: Angenommen, zwischen zwei Ortschaften bestehen mehrere Straßenverbindungen. Wie stellt man diese dar?

Definition (Multigraph)

Mehrfachkanten sind zwei oder mehr Kanten mit denselben Endpunkten. Endet eine Kante in dem Knoten, in dem sie auch beginnt, bezeichnet man diese Kante als **Schlinge**. Graphen, in denen Schlingen und Mehrfachkanten vorkommen, heißen **Multigraphen**.

Bemerkung

In unserer ursprünglichen Definition eines Graphen sind Multigraphen nicht enthalten. Da man gelegentlich jedoch Mehrfachkanten und auch Schlingen benötigt, haben wir die Definition des Graphen mit dem Begriff des Multigraphen erweitert.

Graphen

Eigenschaften

Satz (Handschlaglemma)

Es sei $G(V, E)$ ein Graph. Dann ist die Summe über alle Grade der Knoten gleich 2-mal die Anzahl der Kanten. In Formeln geschrieben:

$$\sum_{a \in V} \deg(a) = 2|E|.$$

Woher stammt wohl der Name „Handschlag“-Lemma (*Lemma* bedeutet lediglich „Hilfssatz“)?

Erinnerung: $|M|$ bedeutet *Mächtigkeit* der Menge M . Falls M endlich ist, so ist das gerade die Anzahl der Elemente von M .

Graphen

Eigenschaften

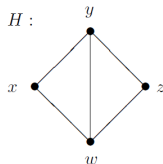
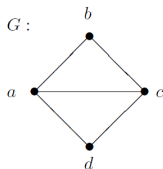
Satz

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit *ungeradem* Grad gerade.

Beispiel

Graphen

Eigenschaften



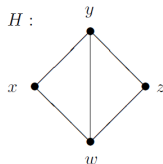
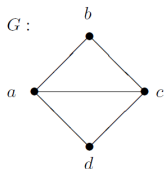
Frage: Sind die beiden Graphen G und H „gleich“, obwohl Knoten und Kanten verschieden bezeichnet sind?

Definition (Äquivalenz)

Es seien $G(V, E)$ und $H(V', E')$ zwei Graphen. Wenn es eine bijektive Abbildung $f : V \rightarrow V'$ gibt, sodass $ab \in E$ ist, genau dann, wenn $f(a)f(b) \in E'$ ist, dann nennt man die beiden Graphen **äquivalent** (oder **isomorph**).

Graphen

Eigenschaften



Aufgabe

Wie lauten die Ergebnisse von f im obigen Beispiel?

Knoten	a	b	c	d
$f(\text{Knoten})$				

Digraphen

Gerichtete Graphen

- ▶ Bislang hatten unsere Kanten keine Richtung. In der Realität besitzen Kanten aber möglicherweise Richtungen, wie z.B. Einbahnstraßen im Straßennetz, Flüsse in Transportsystemen, etc.

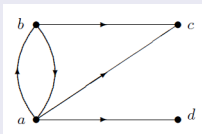
Definition (Digraph)

Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Graph, in dem jede Kante eine Richtung besitzt. Eine Kante, die in einem Digraphen vom **Anfangsknoten** a zum **Endknoten** b geht, wird mit dem geordneten Paar (a, b) bezeichnet. Auch hier kürzen wir wieder ab , indem wir lediglich ab schreiben und dabei beachten, dass $ab \neq ba$. In der graphischen Darstellung eines Digraphen markieren wir die Richtung der Kanten durch Pfeile.

Digraphen

Beispiel

Aufgabe 1



Wie lauten die Mengen V und E des oben dargestellten Digraphen?

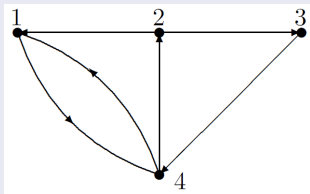
Lösung

$$V = \{a, b, c, d\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c)\}.$$

Digraphen

Beispiel

Aufgabe 2



Wie lauten die Mengen V und E des oben dargestellten Digraphen?

Darstellungsmöglichkeiten

Adjazenzmatrix

- ▶ Wie kann man Graphen „geschickt“ abspeichern?
- ▶ An dieser Stelle stellen wir nun die Verbindung zwischen Graphentheorie und linearer Algebra her.

Definition (Adjazenzmatrix)

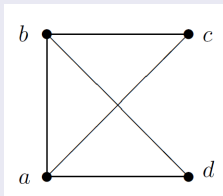
Die Knoten eines Graphen $G(V, E)$ seien durchnummeriert als $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Dann ist die **Adjazenzmatrix** $A = (a_{jk})$ des Graphen definiert als

$$a_{jk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \{j, k\} \in E, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Darstellungsmöglichkeiten

Adjazenzmatrix

Aufgabe 1

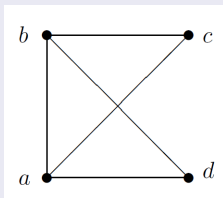


Wie lautet die Adjazenzmatrix zu diesem Graphen?

Darstellungsmöglichkeiten

Adjazenzmatrix

Aufgabe 1 – Lösung



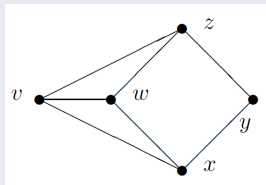
Wie lautet die Adjazenzmatrix zu diesem Graphen?

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	1
c	1	1	0	0
d	1	1	0	0

Darstellungsmöglichkeiten

Adjazenzmatrix

Aufgabe 2



Wie lautet die Adjazenzmatrix zu diesem Graphen?

Darstellungsmöglichkeiten

Beispiel

Aufgabe 3

Stellen Sie den Graphen zu folgender Adjazenzmatrix A graphisch dar:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Darstellungsmöglichkeiten

Eigenschaften von Adjazenzmatrizen

- ▶ Die Adjazenzmatrix eines einfachen Graphen ist quadratisch und symmetrisch.
- ▶ Da in einem einfachen Graphen keine Schlingen erlaubt sind, sind die Einträge auf der Hauptdiagonalen einer Adjazenzmatrix gleich 0.
- ▶ Haben zwei Graphen dieselbe Adjazenzmatrix, so sind sie äquivalent. Umgekehrt können äquivalente Graphen verschiedene Adjazenzmatrizen besitzen – je nach Nummerierung der Knoten.
- ▶ Es gilt jedoch immer: Die Summe der Elemente einer Zeile bzw. Spalte der Adjazenzmatrix entspricht dem Grad des jeweiligen Knotens:

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{kj} = \deg(k).$$

Darstellungsmöglichkeiten

Adjazenzmatrix eines Digraphen

Definition (Adjazenzmatrix eines Digraphen)

Die Knoten eines Digraphen $G(V, E)$ seien durchnummeriert als $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Dann ist die **Adjazenzmatrix** $A = (a_{jk})$ des Digraphen definiert als

$$a_{jk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } (j, k) \in E, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

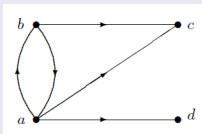
Bemerkung

Die Adjazenzmatrix eines Digraphen muss nicht notwendigerweise symmetrisch sein.

Adjazenzmatrix eines Digraphen

Aufgabe

Aufgabe



Wie lautet die Adjazenzmatrix zu diesem Digraphen?

Darstellungsmöglichkeiten

Inzidenzmatrix

Definition (Inzidenzmatrix)

Die **Inzidenzmatrix** eines Graphen beschreibt, welche Knoten mit welchen Kanten inzident sind. Sie ist also eine (n, q) -Matrix, wobei n die Anzahl der Knoten und q die Anzahl der Kanten des Graphen darstellt.

Aufgabe (Inzidenzmatrix)

Wie sieht der Graph zu folgender Inzidenzmatrix aus?

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Darstellungsmöglichkeiten

Nachbarschaftslisten

Eine dritte Darstellung von Graphen am Computer besteht in dem Anlegen von **Nachbarschaftslisten**. In dieser werden zu jedem Knoten alle benachbarten Knoten angegeben.

Aufgabe

Wie sieht der Graph zu folgender Nachbarschaftsliste aus?

Knoten	benachbarte Knoten
1	2, 3, 4
2	1, 3, 4
3	1, 2
4	1, 2

Wege und Kreise

Kantenzug

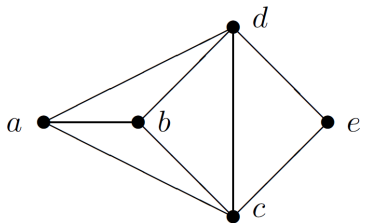
Definition (Kantenzug)

Eine Folge von inzidenten Kanten heißt **Kantenzug**. Sind Anfangs- und Endknoten eines Kantenzuges identisch, so spricht man von einem **geschlossenen** Kantenzug. Die Anzahl der durchlaufenen Kanten nennt man **Länge** des Kantenzuges.

Wege und Kreise

Aufgabe

Aufgabe



Geben Sie für den obigen Graphen einen Kantenzug und dessen Länge an. Ist der Kantenzug geschlossen?

Wege und Kreise

Definition

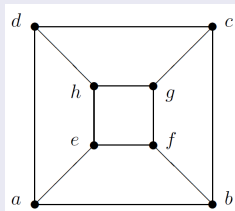
Definition (Weg, Kreis)

Ein Kantenzug, bei dem alle vorkommenden Knoten verschieden sind, wird **Weg** genannt. Ein geschlossener Weg heißt **Kreis**.

Wege und Kreise

Beispiel

Aufgabe



Handelt es sich um einen (geschlossenen) Kantenzug, einen Weg oder einen Kreis?

- | | | | |
|-----|------------------------|-----|------------------------|
| (a) | $b, c, g, f, b;$ | (d) | $a, b, c, g, f;$ |
| (b) | $a, b, c, b, f;$ | (e) | $a, b, c, g, f, e, a.$ |
| (c) | $a, b, c, b, f, e, a;$ | | |

Anzahl der Wege in einem Graphen

Potenzen der Adjazenzmatrix

- ▶ Die n -te Potenz $A^n := (a_{jk}^n)$ der Adjazenzmatrix $A = (a_{jk})$ eines (Di-)Graphen besitzt eine interessante Interpretation:

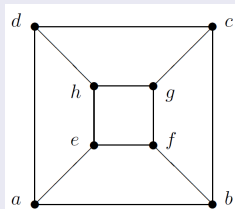
Der Eintrag (a_{jk}^n) gibt die Anzahl der Wege der Länge n von Knoten j zu Knoten k an.

Anzahl der Wege in einem Graphen

Potenzen der Adjazenzmatrix

Aufgabe

Wir betrachten nochmals den Graphen von Folie 114:



Wieviele Wege der Länge 3 gibt es, um von Knoten a zu Knoten g zu gelangen?

Lösen Sie die Aufgabe durch nachzählen und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem entsprechenden Eintrag in der Adjazenzmatrix A^3 .

Zusammenhängende Graphen

Für den Fall, dass zwischen beliebigen Knoten eines Graphen immer ein Weg existiert, ist folgende Definition nützlich:

Definition (Zusammenhängender Graph)

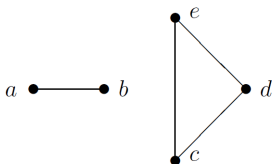
Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es zwischen je zwei beliebigen Knoten einen Weg gibt.

Ein maximal zusammenhängender Teilgraph von G heißt **(Zusammenhangs-)Komponente** von G .

Ein Digraph heißt zusammenhängend, wenn der zugehörige (ungerichtete) Graph diese Eigenschaft besitzt.

Zusammenhängende Graphen

Beispiel



Dieser Graph ist nicht zusammenhängend, da es bspw. keinen Weg von a nach d gibt. Er besteht aus zwei Komponenten, also aus zwei zusammenhängenden Teilen.

Zusammenhängende Graphen

Satz

Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten muss mindestens $n - 1$ Kanten haben.

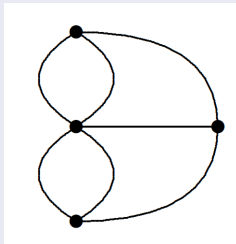
Breadth-First-Algorithmus → Übungen!

Beispiel

Schneepflug

Aufgabe (Schneepflug)

Kehren wir nun zum Ausgangsproblem dieses Kapitels zurück. Es lautete: Das unten abgebildete Straßensystem soll von Schnee befreit werden. Die Kanten sind die Straßen, die Knoten Straßenkreuzungen. Gibt es eine optimale Tour für die Schneepflugfahrerin, bei der sie jede Straße genau einmal entlang fährt und am Ende wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt?



Königsberger Brückenproblem

Das Problem in obigem Beispiel ist bekannt unter dem Namen „Königsberger Brückenproblem“ (die Knoten entsprechen den Stadtteilen und die Kanten den Brücken dazwischen) und geht zurück auf den Schweizer Mathematiker Leonhard Euler. Die Einwohner der Stadt Königsberg (heute Kaliningrad in Russland) hatten sieben Brücken über den Fluss Pregel und überlegten, ob es möglich wäre, einen Stadtrundgang zu machen, der dort endet, wo er angefangen hat, und bei dem jede Brücke genau einmal überquert wird.

Definition (Euler-Zug)

Ein **Euler-Zug** ist ein geschlossener Kantenzug, der *jede* Kante des Graphen *genau einmal* enthält.

Überlegen Sie: Was ist der Unterschied zwischen einem Euler-Zug und einem Kreis?

Multigraphen und Euler-Züge

Satz

Ein zusammenhängender Multigraph besitzt genau dann einen Euler-Zug, wenn alle Knoten einen geraden Grad haben.

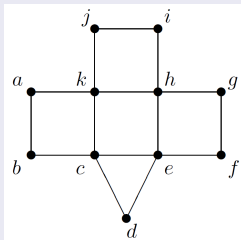
- ▶ In Königsberg ist das offenbar nicht der Fall. . .

Beispiel

Schneepflug

Aufgabe

Zurück zur Schneepflugfahrerin: Wie sieht es denn in diesem Straßennetz aus?



Exkurs: Graphentheorie

Hamilton-Kreise

Definition (Hamilton-Kreis)

Ein Kreis, der *jeden* Knoten (genau einmal) enthält, heißt **Hamilton-Kreis**.

Satz

Wenn ein Graph mit n Knoten mindestens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ Kanten besitzt, dann besitzt er auch einen Hamilton-Kreis.

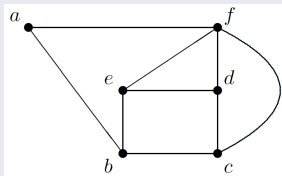
Bemerkung

Das ist nur eine hinreichende Bedingung. Es gibt umgekehrt Graphen, die diese Bedingung nicht erfüllen, aber trotzdem einen Hamilton-Kreis besitzen. Algorithmen für das Auffinden von Hamilton-Kreisen sind Mangelware. . .

Beispiel

Postbote

Aufgabe (Hamilton-Kreis)



In obigem Graph seien die Knoten eine Darstellung für Briefkästen und die Kanten Straßen, die zu den Kästen führen. Der Postbote startet in a und soll alle Kästen leeren. Gibt es einen geschlossenen Kantenzug im Graphen, sodass er an jedem Briefkasten genau einmal vorbeikommt?

Inhalt

von Kapitel 2: Lineare Algebra

Matrizen & Determinanten

Matrizen

Matrixoperationen

Determinanten

Vektorräume

Anwendungen von Matrizen

Lineare Gleichungssysteme

Eigenwertprobleme

Exkurs: Graphentheorie

Bäume und kürzeste Wege

Bäume

Wurzelbäume

Bäume

Einführung

- ▶ Bäume gehören als grundlegende Bausteine zu den wichtigsten Graphen.
- ▶ Sie sind geeignet für die Darstellung von Strukturen, z.B. Darstellung von Abläufen (Suchen, Sortieren, etc.).

Definition (Bäume und Wälder)

Ein **Baum** ist ein Graph, der zusammenhängend ist und keine Kreise enthält. Ein Graph, der nicht zusammenhängend ist, dessen Komponenten aber Bäume sind, heißt **Wald**.

Bäume

Einführung

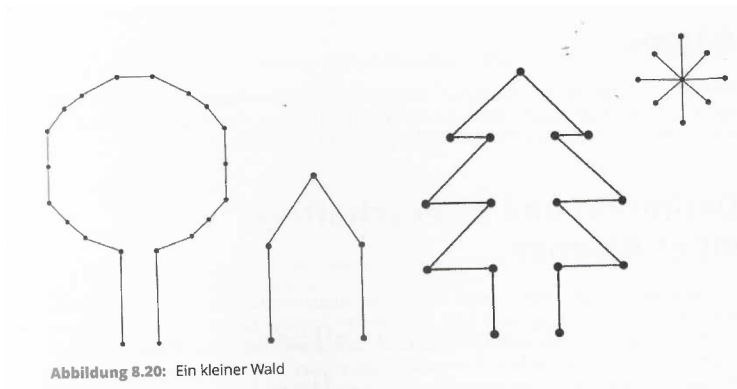


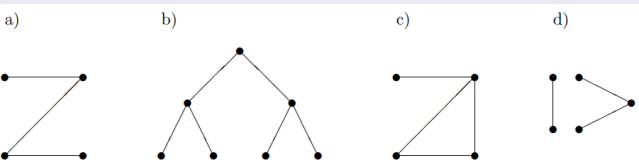
Abbildung: Ein kleiner Wald

Bäume

Einführung

Aufgabe (Baum oder nicht Baum?)

Handelt es sich bei den folgenden Graphen um Bäume oder nicht?

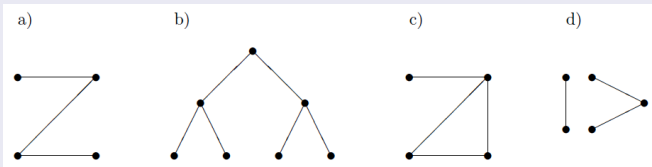


Bäume

Einführung

Aufgabe (Baum oder nicht Baum?) – Lösung

Handelt es sich bei den folgenden Graphen um Bäume oder nicht?



- (a) Baum, (c) Kein Baum, enthält einen Kreis,
 (b) Baum, (d) Ein Wald, bestehend aus zwei Bäumen.

Bäume

Einführung

- ▶ Baum (a) hat vier Knoten und drei Kanten.
- ▶ Würde man eine Kante entfernen, so wäre der Restgraph nicht mehr zusammenhängend.
- ▶ Fügt man irgendeine weitere Kante hinzu, so entsteht ein Kreis.
- ▶ Ein Baum enthält also gerade so viele Kanten wie notwendig und so wenige Kanten wie möglich, um zusammenhängend zu sein.

Satz

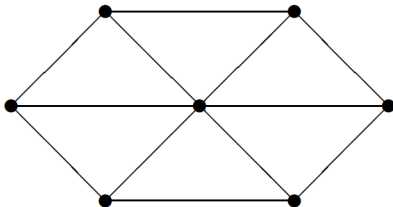
Ein zusammenhängender Graph G mit n Knoten ist genau dann ein Baum, wenn er eine (und damit zugleich alle) der folgenden Eigenschaften besitzt:

- (a) G hat genau $n - 1$ Kanten.
- (b) Entfernt man (irgend)eine Kante, so ist der Restgraph nicht mehr zusammenhängend.
- (c) Zwischen je zwei Knoten gibt es genau einen Weg.

Bäume

Aufspannender Baum

Betrachten wir nun ein Kommunikationsnetz G mit Schaltelementen (Knoten) und Verbindungen (Kanten) zwischen den einzelnen Elementen:



Wie sähe ein Schaltplan aus, der nur so wenige Kanten wie notwendig enthält, dass trotzdem noch jedes Element (ggf. über einen Vermittler) mit jedem anderen kommunizieren kann?

Bäume

Aufspannender Baum

Wir suchen also einen Baum, der alle n Knoten von G enthält, so etwas wie ein „Gerüst“.

Definition (Aufspannender Baum)

Es sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten. Ein Baum, der alle n Knoten von G enthält, heißt **aufspannender Baum** von G .

Aufgabe (Kommunikationsnetz)

Finden Sie einen aufspannenden Baum für das Kommunikationsnetz.

Bäume

Aufspannender Baum

Aufgabe (Kommunikationsnetz) – Lösung

- ▶ Entferne nach und nach Kanten aus Kreisen, bis genau 6 Kanten übrig bleiben.
- ▶ Eine Alternative ist der Breadth-First-Algorithmus (siehe Übungsserie 8). Wenn wir mit dem mittleren Knoten beginnen, sind wir schon nach einem Schritt fertig.

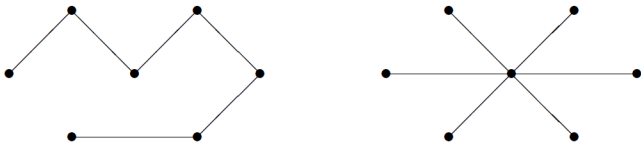


Abbildung: Mögliche aufspannende Bäume im Kommunikationsnetz.

Wurzelbäume

Wir wollen nun Bäume betrachten, die zur Speicherung von Daten verwendet werden.

Definition (Wurzelbaum)

Wenn ein Baum einen ausgezeichneten Knoten w besitzt, von dem alle Knoten „abstammen“, dann heißt der Baum **Wurzelbaum**, der ausgezeichnete Knoten w heißt **Wurzel**.

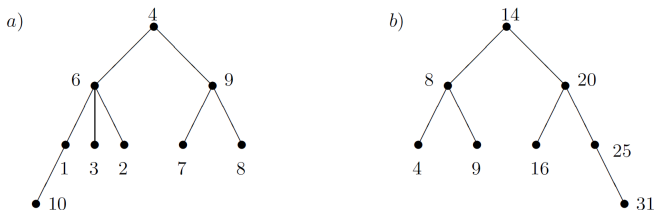


Abbildung: Wurzelbäume.

Wurzelbäume

Eigenschaften

- ▶ Man liest einen Wurzelbaum von der Wurzel weg, in den Abbildungen von oben nach unten (anders als in der Natur...).
- ▶ Aufgrund der Leserichtung kann man von Knoten in einem Wurzelbaum von **Vorgänger** und **Nachfolger** sprechen: In Baum (a) ist z.B. Knoten 10 ein Nachfolger von Knoten 6.
- ▶ Ein benachbarter Knoten heißt **unmittelbarer Vorgänger/Nachfolger**.
- ▶ Knoten ohne Nachfolger heißen **Blätter**.
- ▶ Die **Länge eines Wurzelbaumes** ist die Länge des längsten Weges von der Wurzel zu einem Knoten. Die Wurzelbäume in der Abbildung oben haben demnach die Länge 3.
- ▶ Ein weiteres typisches Beispiel für einen Wurzelbaum ist ein Familienstammbaum, in dem die Knoten die verheirateten Paare bzw. Kinder repräsentieren. Die Länge der Wege in dem Baum gibt die Anzahl der Generationen wieder.

Wurzelbäume

Stammbaum

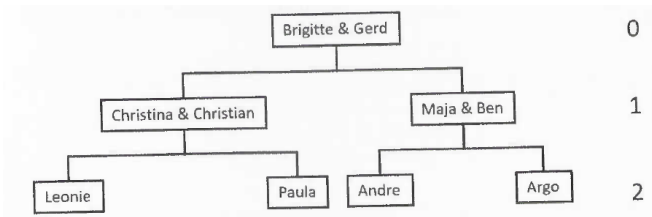


Abbildung: Ein Familienstammbaum.

Wurzelbäume

Binäre Bäume

- ▶ Wenn jeder Knoten eines Wurzelbaumes höchstens zwei unmittelbare Nachfolger hat, so spricht man von einem **binären Baum**.
- ▶ Der Baum (a) ist also kein binärer Baum, wohl aber Baum (b).
- ▶ Zu jedem Knoten x in einem binären Baum kann es (aber muss es nicht) einen linken und einen rechten unmittelbaren Nachfolger x_L oder x_R geben. Der Baum, der in x_L (bzw. x_R) verwurzelt ist, heißt **linker (rechter) Unterbaum** von x .
- ▶ Binäre Bäume bieten sich als effiziente Datenstrukturen an.

Binäre Bäume

Suchbaumalgorithmus

Suchbaumalgorithmus

Gegeben sei eine Menge von Daten mit strikter Ordnung $<$. Die Daten sind als Knoten so in einem binären Wurzelbaum gespeichert, dass für einen festen Knoten y alle Knoten mit $x < y$ im linken Unterbaum und alle Knoten mit $x > y$ im rechten Unterbaum von y liegen.

1. **Suche eines Knotens x :** Ist x gleich dem aktuellen Knoten y , dann STOP („ x gefunden“). Ansonsten suche im entsprechenden Unterbaum (links für $x < y$ und rechts für $x > y$) weiter. Ist der entsprechend Unterbaum leer, dann STOP („ x nicht gefunden“).
2. **Einfügen eines Knotens x :** Suche nach x . Falls x nicht gefunden wird, ordne x als unmittelbaren (linken bzw. rechten) Nachfolger jenes Knotens ein, bei dem die Suche abgebrochen wurde. Falls x gefunden wurde, dann STOP („ x bereits vorhanden“).

Binäre Bäume

Suchbaumalgorithmus

Suchbaumalgorithmus (Fortsetzung)

3. **Löschen eines Knotens** x : Suche nach x . Je nachdem, wie viele unmittelbare Nachfolger x hat, sind drei Fälle zu unterscheiden:
 - (i) Ist x ein Blatt, so entferne x .
 - (ii) Gibt es nur einen Unterbaum, der in x verwurzelt ist, so ersetze x durch diesen Unterbaum.
 - (iii) Gibt es zwei Unterbäume, so suche zunächst das (im Sinne der Ordnung $<$) kleinste Element y im rechten Unterbaum von x (gehe dazu im rechten Unterbaum so lange nach links, bis es keinen linken unmittelbaren Nachfolger mehr gibt). Das so gefundene y ist entweder ein Blatt oder es hat genau einen unmittelbaren Nachfolger. Lösche y und ersetze x durch y .

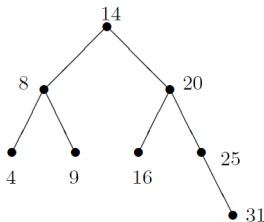
Binäre Bäume

Suchbaumalgorithmus

Aufgabe (Suchbaumalgorithmus)

Betrachten Sie den unten abgebildeten binären Suchbaum, der die natürlichen Zahlen 14, 8, 20, 4, 16, 9, 25, 31 darstellt. Führen Sie folgende Schritte des Suchbaumalgorithmus graphisch durch:

- Ausgehend von Knoten 14 suchen Sie nach Knoten 9.
- Löschen Sie den Knoten 20.
- Fügen Sie den Knoten 20 wieder ein.



Binäre Bäume

Suchbaumalgorithmus

Satz

Die maximale Anzahl von Vergleichen, die der Suchbaumalgorithmus bei der Suche in einem binären Wurzelbaum der Länge l durchführen muss, ist $l + 1$.

Die Länge des Baumes ist also entscheidend für den Suchaufwand.
Wie erzeugt man wohl einen Suchbaum mit möglichst geringer Länge?
(Tipp: Algorithmus benutzen!)

Binäre Bäume

Suchbaumalgorithmus

Der folgende Algorithmus erzeugt einen Suchbaum von geringster Länge bei gegebenem geordneten Datensatz.

Algorithmus (Divide and Conquer)

1. Ordne die Daten zunächst nach Größe in einer Liste.
2. Wähle das Element in der Mitte der Liste als Wurzel w .
3. Aus den übrigen Teillisten nehmen wir wieder das jeweils mittlere Element und ordnen es als unmittelbaren Vorgänger bzw. Nachfolger von w an.
4. Wiederhole Schritt 3 bis die Liste leer ist.

Binäre Bäume

Suchbaumalgorithmus

Wie viele Daten können denn in einem binären Suchbaum der Länge l maximal gespeichert werden?

Satz

In einem binären Suchbaum der Länge l können maximal

$$n = \sum_{k=0}^l 2^k = 2^{l+1} - 1$$

Daten gespeichert werden.

Bemerkung: Die Formel entspricht der endlichen geometrischen Reihe.

Frage an Sie: Wie groß ist n für $l = 5$?

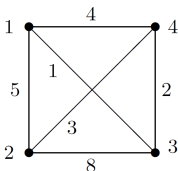
Gewichtete Graphen

Definition

Definition (Gewichteter Graph)

Ein Graph, bei dem jeder Kante $\{a, b\}$ ein **Gewicht** $w(a, b) \geq 0$ zugeordnet ist, heißt **gewichteter Graph**.

Im Computer kann das Gewicht als entsprechender Eintrag in der Adjazenzmatrix abgespeichert werden.



Frage: Wie lautet die Adjazenzmatrix dieses Graphen?

Abbildung: Ein gewichteter Graph.

Gewichtete Graphen

Das Problem des Handlungsreisenden

- ▶ Ein gewichteter Graph spielt bei einem der berühmtesten algorithmischen Probleme eine Rolle: Dem **Problem des Handlungsreisenden** (engl.: Traveling Salesman Problem (TSP)).
- ▶ Ein Handlungsreisender hat eine Liste von Städten mit Kunden, die er besuchen muss. Je zwei Städte sind durch eine Fluglinie verbunden.
- ▶ Der Vertreter möchte nun eine Rundreise buchen, in der er jede Stadt genau einmal besucht und dabei die Gesamflugkosten minimiert.
- ▶ **Frage:** Wie modelliert man dieses Problem?

Gewichtete Graphen

Das Problem des Handlungsreisenden

- ▶ Stelle die Städte als Knoten eines Graphen dar, die Fluglinien als Kanten.
- ▶ Da je zwei Städte mit einer Fluglinie verbunden sind, entsteht ein sogenannter **vollständiger Graph**, also ein Graph, bei dem es zwischen je zwei Knoten eine Kante gibt (Bezeichnung: K_n).
- ▶ Die Kosten der Flugverbindung zwischen den Städten i und j werden durch das Gewicht $w(i, j) \geq 0$ beschrieben.
- ▶ Eine Rundreise, bei der jede Stadt genau einmal besucht wird, ist ein *Hamilton-Kreis*.
- ▶ Wie viele Hamilton-Kreise gibt es in einem vollständigen Graphen K_n ? Es gibt genau $n!$ Stück; wenn der Anfangsort festgelegt wird, immerhin noch $(n - 1)!$...

Gewichtete Graphen

Das Problem des Handlungsreisenden

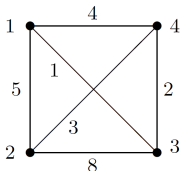


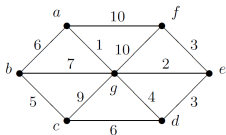
Abbildung: Ein gewichteter Graph.

Aufgabe (TSP)

Ausgehend von Knoten 1 – wie lautet die billigste Rundreise?

Gewichtete Graphen

Minimale aufspannende Bäume



Wie sieht ein Schaltplan mit minimalen Verbindungskosten aus?

Abbildung: Gewichtetes Kommunikationsnetz.

Definition (Minimal aufspannender Teilbaum)

Ein **minimal aufspannender Teilbaum** T in einem gewichteten Graphen G ist ein aufspannender Baum mit minimalem Gesamtgewicht

$$\sum_{\{a,b\} \in E(T)} w(a,b),$$

wobei $E(T)$ die Kantenmenge des Baumes T und $w(a,b)$ das Gewicht der Kante $\{a,b\}$ bezeichnet.

Gewichtete Graphen

Minimale aufspannende Bäume

Algorithmus von KRUSKAL

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph G mit n Knoten. Der Algorithmus konstruiert einen minimalen aufspannenden Baum.

1. Ordne alle Kanten ihrem Gewicht nach. Beginne mit dem Teilgraphen, der nur aus n Knoten von G besteht, und füge eine Kante mit minimalem Gewicht hinzu (also die erste Kante aus der Liste der geordneten Kanten).
2. Wähle die nächste Kante $\{a, b\}$ aus der Liste und füge sie zum bisherigen Graphen dazu, falls die Komponenten von a und b verschieden sind (stellt sicher, dass kein Kreis entsteht).
3. Wiederhole Schritt 2 so lange, bis $n - 1$ Kanten gewählt sind. Sie ergeben einen minimal aufspannenden Baum.

Gewichtete Graphen

Minimale aufspannende Bäume

Aufgabe

Finden Sie einen minimal aufspannenden Graphen für das Kommunikationsnetz. Wie hoch sind die Gesamtkosten?

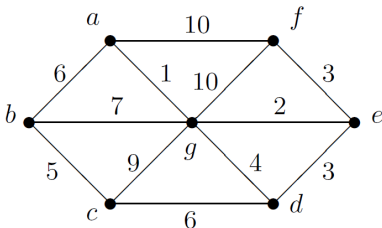


Abbildung: Gewichtetes Kommunikationsnetz.

Gewichtete Graphen

Minimale aufspannende Bäume

Aufgabe – Lösung

Finden Sie einen minimal aufspannenden Graphen für das Kommunikationsnetz. Wie hoch sind die Gesamtkosten?

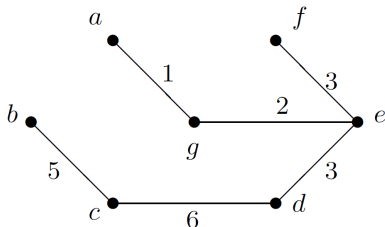


Abbildung: Minimal aufspannender Baum mit Gesamtkosten von 20. Man beachte, dass es zwei optimale Lösungen zu diesen Gesamtkosten gibt. Finden Sie die andere Lösung?

Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

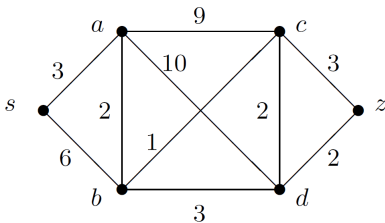


Abbildung: Stadtplan: Kanten = Straßen, Knoten = Kreuzungen.

Die Gewichte geben die Straßenlänge an. Wie lautet der kürzeste Weg von s nach z ?

Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

Definition (Länge eines Weges)

Die **Länge eines Weges** W in einem gewichteten Graphen ist die Summe der Gewichte der Kanten, die entlang von W durchlaufen werden:

$$\sum_{\{a,b\} \in E(W)} w(a,b),$$

wobei $E(W)$ die Kantenmenge des Weges W bezeichnet.

Ein **kürzester Weg** von einem Knoten s zu einem Knoten z ist ein Weg minimaler Länge.

Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

- ▶ Das Problem des kürzesten Weges kann mit dem Algorithmus von DIJKSTRA gelöst werden.
- ▶ Der Algorithmus konstruiert ausgehend vom Startknoten s einen aufspannenden Baum.
- ▶ In jedem Schritt wird eine kürzeste Verlängerung des bisherigen Teilbaumes gesucht. Dabei werden Markierungen (Label) verteilt:
- ▶ permanentes Label L_k (= Länge des kürzesten Weges von s nach k),
temporäres Label T_k (= Abschätzung nach oben für den kürzesten Weg von s nach k).

Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph mit Knoten $1, 2, \dots, n$ und Kanten ij mit Gewichten $w(i, j) \geq 0$.

Der Algorithmus bestimmt die Länge L_j des kürzesten Weges von 1 nach j für alle Knoten $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ und einen aufspannenden Baum mit diesen kürzesten Wegen.

Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

Algorithmus von DIJKSTRA

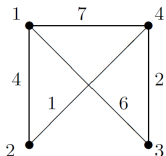
1. Knoten 1 erhält das permanente Label $L_1 = 0$.
Alle anderen Knoten erhalten als temporäre Label $T_j = \infty$.
Wähle Knoten $k = 1$.
2. **Update der temporären Labels:**
Für jeden zu k benachbarten temporär markierten Knoten j : Bestimme $L_k + w(k, j)$ (= Länge des Weges von 1 nach j über den soeben markierten Knoten k). Ist $L_k + w(k, j)$ kleiner als das bisherige temporäre Label T_j , so wird es das neue temporäre Label $T_k := L_k + w(k, j)$ und wir notieren k als Vorgänger von j : $V_j = k$.
3. **Fixierung eines permanenten Labels:**
Wähle einen Knoten k unter den temporär markierten Knoten, dessen temporäres Label T_k minimal ist. Dieser Knoten erhält das permanente Label $L_k = T_k$ (damit ist der kürzeste Weg von 1 nach k ermittelt).
STOP, wenn alle Knoten permanent markiert sind (mit Hilfe der Vorgänger kann nun der Weg rekonstruiert werden), ansonsten wiederhole Schritt 2.

Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

Aufgabe

Finden Sie den kürzesten Weg von Knoten 1 zu allen anderen Knoten für den untenstehenden Graphen. Nutzen Sie dazu den Algorithmus von DIJKSTRA.

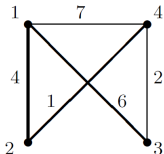


Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

Aufgabe – Lösung

Finden Sie den kürzesten Weg von Knoten 1 zu allen anderen Knoten für den untenstehenden Graphen. Nutzen Sie dazu den Algorithmus von DIJKSTRA.



Gewichtete Graphen

Kürzeste Wege

- ▶ Der Algorithmus von DIJKSTRA ist ein zentraler Bestandteil des Internets.
- ▶ Das Internet ist eine Ansammlung von lokalen Netzwerken (LANs).
- ▶ Innerhalb eines LAN können zwei Rechner direkt kommunizieren.
- ▶ Wollen Rechner aus verschiedenen LANs miteinander kommunizieren, schicken sie die Daten an einen Router.
- ▶ Dessen Aufgabe ist es, die Daten auf kürzestem Weg zum Router des Empfängernetzwerkes zu schicken.

Graphentheorie

Schluss

- ▶ Mit diesen Folien haben Sie einen kurzen Einblick in die Graphentheorie gewonnen.
- ▶ Natürlich gibt es noch eine unüberblickbare Vielzahl weiterer Anwendungen von Graphen – sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik und darüber hinaus.

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Grundbegriffe)

1. Sie definieren **Graphen** als Tupel bestehend aus zwei Mengen.
2. Sie unterscheiden **Graphen**, **Digraphen** und **Multigraphen**.
3. Sie definieren **Isomorphie** von Graphen und erklären diese anschaulich mit einer Beispielskizze.
4. Sie erläutern die Begriffe **Adjazenz(matrix)**, **Knotengrad** und **Planarität**.
5. Sie erklären (**geschlossene**) **Kantenzüge**, **Wege** und **Kreise**, sowie deren **Länge** anhand von Beispielgraphen und setzen die n -te Potenz der Adjazenzmatrix in Beziehung dazu.
6. Sie erklären den Begriff des **Euler-Zuges** anhand eines selbst gewählten Beispiels.
7. Sie definieren **gewichtete Graphen** als Erweiterung von (allgemeinen ungerichteten) Graphen.
8. Auf dieser Grundlage erläutern Sie das **Problem des Handlungsreisenden**.