Halbordnung auf $\mathbb{N}$

Eine Relation $\leq$ auf einer Menge S ist eine Halbordnung, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

1.Reflexivität: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n|n$, da $n=1*n$.

2.Antisymmetrie: Für alle $m,n \in N$, wenn $m|n$ und $n|m$, dann muss $m=n$ gelten.

3.Transitivität: Für alle $l,m,n \in \mathbb{N}$, wenn $l|m$ und $m|n$, dann existieren ganze Zahlen c und d sodass $lc=m$ und $md=n$. Daraus folgt, dass $l(cd)=n$, also $l|n$.

Da diese drei Eigenschaften erfüllt sind, ist die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ eine Halbordnung.

Keine totale Ordnung auf $\mathbb{N}$

Eine totale Ordnung verlangt, dass für alle $m,n \in \mathbb{N}$ entweder $m|n$ oder $n|m$ gilt. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn zum Beispiel weder 2|3 noch 3|2 gilt.

Keine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$

Die Antisymmetrie ist in $\mathbb{Z}$ nicht erfüllt. Betrachte man $a=2$ und $b=-2$: Es gilt $2|-2$ (da $2*(-1)=-2$) und $-2|2$ (da $-2*(-1)=2$), aber $2 \neq -2$. Somit ist die Antisymmetrie verletzt und die Teilbarkeitsrelation kann keine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$ sein.