Nachbereitung Übung 6 Diskrete Strukturen

a)

1)

$$z_k := e^{\frac{\pi}{3}ki}, k = 0, ..., 5$$
$$G(\{z_0, ..., z_5\}, *, ^{-1}, 1)$$

$$\begin{aligned} z_5 * z_4 &= e^{\frac{\pi}{3}5i} * e^{\frac{\pi}{3}4i} \\ &= e^{\frac{\pi}{3}5i + \frac{\pi}{3}4i} \\ &= e^{\frac{\pi 5i}{3} + \frac{\pi 4i}{3}} \\ &= e^{3\pi i} \\ &= (-1)^3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

2)

$*$	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_0	1	$e^{\frac{\pi i}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	-1	$e^{\frac{4\pi i}{3}}$	$e^{\frac{5\pi i}{3}}$
z_1	$e^{\frac{\pi i}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	-1	$e^{\frac{4\pi i}{3}}$	$e^{\frac{5\pi i}{3}}$	1
z_2	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	-1	$e^{\frac{4\pi i}{3}}$	$e^{\frac{5\pi i}{3}}$	1	$e^{\frac{\pi i}{3}}$
z_3	-1	$e^{\frac{4\pi i}{3}}$	$e^{\frac{5\pi i}{3}}$	1	$e^{\frac{\pi i}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$
z_4	$e^{\frac{4\pi i}{3}}$	$e^{\frac{5\pi i}{3}}$	1	$e^{\frac{\pi i}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	-1
z_5	$e^{\frac{5\pi i}{3}}$	1	$e^{\frac{\pi i}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	-1	$e^{\frac{4\pi i}{3}}$

alternativ:

$*$	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_0	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_0
z_2	z_2	z_3	z_4	z_5	z_0	z_1
z_3	z_3	z_4	z_5	z_0	z_1	z_2
z_4	z_4	z_5	z_0	z_1	z_2	z_3
z_5	z_5	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4

3)

$$z_0^{-1} = z_0 = 1$$
$$z_3^{-1} = z_3 = 1$$

b)

$7Z$ ist eine Gruppe, wenn

1. Die komposition assoziativ ist
2. Es ein neutrales element e gibt für welches gilt: $g + e = g = e + g$
3. Für alle $g \in 7Z$ ein $-g$ existiert mit: $g + (-g) = (-g) + g = e$

1)

$$a, b, c \in 7\mathbb{Z}$$
$$\text{Zu zeigen:}$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$\text{Assoziativität gilt in } \ \mathbb{Z}$$
$$7x + (7y + 7z) = (7x + 7y) + 7z$$
$$x, y, z \in \mathbb{Z}$$

2)

Neutrales Element $0 \in 7\mathbb{Z}$

$$0_{7\mathbb{Z}} = 7 * 0_{\mathbb{Z}}$$
$$a_{7\mathbb{Z}} + 0_{7\mathbb{Z}} = 0_{7\mathbb{Z}} + a_{7\mathbb{Z}} = a_{7\mathbb{Z}} \text{ für alle } a \in 7\mathbb{Z}$$

3)

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists -x \in \mathbb{Z} : x + (-x) = 0_{\mathbb{Z}}$
Sei $a \in 7\mathbb{Z}$ beliebig. Es gilt: $a_{7\mathbb{Z}} = 7x$ für $x \in \mathbb{Z}$
in $\mathbb{Z}$ gilt $7x + (-7x) = 0 = a_{7\mathbb{Z}} + (-a_{7\mathbb{Z}})$

c)

m	n	q	r	x	y
36	13	2	10	4	-11
13	10	1	3	-3	4
10	3	3	1	1	-3
3	1	3	0	0	1

$$36 - 11 = 25$$
$$25 * 13 \equiv 1 (\bmod 36)$$

Das multiplikative Inverse von 13 in $\mathbb{Z}_{36}$ ist 25.