

---

## Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 11

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** Überprüfen Sie die folgenden stückweise definierten Funktionen  $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{falls } x < 1 \\ -4x^2 + 8 & \text{falls } 1 \leq x < 3 \\ -6x - 8 & \text{falls } x \geq 3 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \ln(x) + \frac{1}{x} & \text{falls } x < e \\ \frac{1}{e} + \frac{1}{\ln(x)} & \text{falls } e \leq x < 100 \\ e^{x-101} + \frac{50}{x \ln(10)} & \text{falls } x \geq 100 \end{cases}$$

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie jeweils den Parameter  $a \in \mathbb{R}$  so, dass die stückweise definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Übergangsstelle stetig ist.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{falls } x < 2 \\ -x + a & \text{falls } x \geq 2 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} 2x^a - 1 & \text{falls } x < 4 \\ 2\sqrt{x} - \frac{x}{4} & \text{falls } x \geq 4 \end{cases}$$
$$(c) f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1, & \text{falls } x < 2 \\ x^3 + ax - 4, & \text{falls } x \geq 2 \end{cases} \quad (d) f(x) = \begin{cases} ax^2 - a^2x + 3 & \text{falls } x < -1 \\ 5ax - 1 & \text{falls } x \geq -1 \end{cases}$$

**Aufgabe 3:** Gegeben sind die nachstehenden Funktionen  $f_i : x \mapsto y = f_i(x)$ , wobei  $x \in D_i$  mit größtmöglichen Definitionsbereich  $D_i$ , der Form

$$(i) f_1(x) = \frac{2x+1}{3+2x} \quad (ii) f_2(x) = \frac{x^3-1}{4x-4} \quad (iii) f_3(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \operatorname{sgn}(1-x).$$

(a) Bestimmen Sie Zahlen  $x_0 \in \mathbb{R}$ , für welche die folgenden Funktionen jeweils keinen Funktionswert besitzen, also nicht definiert sind.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an diese Stellen, d. h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) \text{ für } x \in D_i.$$

*Hinweis:* Wenden Sie formal die Rechenregeln zur Berechnung von Grenzwerten für Verknüpfungen von Funktionen an.

**Aufgabe 4:** Gegeben seien die Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$ ,  $g(0) \neq 0$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $f$  und  $g$  seien stetig an der Stelle  $x = 0$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $f(0) = 0$  und  $g(0) = 1$  gilt.

(b) Weisen Sie nach, dass  $f$  und  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig sind.

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 5:** Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 2x - 2, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = (x + 1)^2.$$

- (a) Wie lautet die Abbildung  $f \circ g$ ?  
 (b) Bestimmen Sie das Urbild  $f^{-1}([0, 4])$  und das Bild  $g([-2, 0])$ .

**Aufgabe 6:** Gegeben sei eine reelle Funktion  $f : x \mapsto y = f(x)$  mit einem bezüglich 0 symmetrischen Definitionsbereich  $D = (-a; a)$  ( $a > 0$ ).

- (a) Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung an die Zuordnungsvorschrift  $y = f(x)$ , so dass der Funktionsgraph die  $y$ -Achse als Spiegelachse besitzt (bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung ist).<sup>1</sup>  
 (b) Untersuchen Sie die nachfolgenden reellen Funktionen  $g_i : x \mapsto g_i(x)$ ,  $i \in \{1; 2; 3\}$  mit  $x \in D_i \subset \mathbb{R}$  auf deren Symmetrieverhalten (gemäß Aufgabenteil ((a))).

$$y = g_1(x) = \sin x \cdot \cos x, \quad y = g_2(x) = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}, \quad y = g_3(x) = \cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

**Aufgabe 7:** Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(4x - 4)^2} \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{4x - 4} \qquad (iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 7}{3 + 4x}$$

*Hinweis:* Zerlegen Sie Zähler- und Nennerpolynome in Linearfaktoren und klammern Sie ggf. gleiche reelle Faktoren aus.

**Aufgabe 8:** Bestimmen Sie jeweils den Parameter  $a \in \mathbb{R}$  so, dass die stückweise definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Übergangsstelle stetig ist.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} & \text{falls } x < 1 \\ ax + 2 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases} \qquad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sin(2x)}{5 - \cos(5x)} & \text{falls } x \leq 0 \\ a \frac{3x + \sin(10x)}{7x - \sin(2x)} + \frac{1}{5} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

**Aufgabe 9:** Gegeben ist die reelle Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in der reellen Variablen  $x \in D \subset \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2tx - \frac{4t}{3}, & x < 1 \\ \frac{1}{x+t}, & x \geq 1 \end{cases}$$

worin  $t$  einen reellen Parameter bezeichnet.

- (a) Geben Sie in Abhängigkeit des Parameters  $t \in \mathbb{R}$  den größtmöglichen Definitionsbereich von  $f$  an.  
 (b) Bestimmen Sie alle  $t \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion  $f$  stetig ist.

<sup>1</sup>Eine reelle Funktion  $f : x \mapsto y = f(x)$  mit  $D = (-a; a)$  ( $a > 0$ ), deren Funktionsgraph die  $y$ -Achse als Spiegelachse besitzt, heißt gerade;  $f$  mit zum Ursprung punktsymmetrischem Funktionsgraph heißt ungerade.