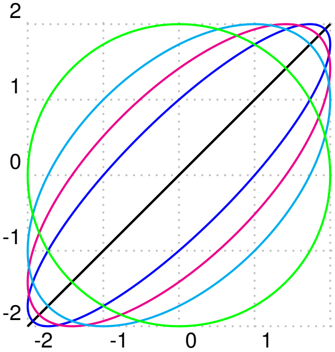
Lissajous-Figuren

Beispiel 4.20

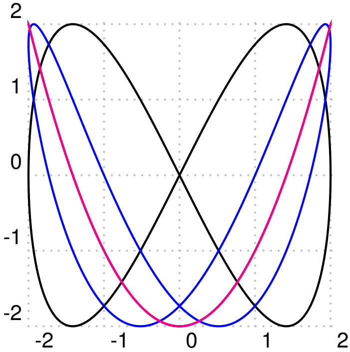
Lissajous-Figuren entstehen durch harmonische Schwingungen

$$x(t) = A_1 \cdot \sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) \quad \text{und} \quad y(t) = A_2 \cdot \sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)$$

mit rationalem Frequenzverhältnis $\omega_1 : \omega_2$ $(\omega_1, \omega_2 > 0)$.



$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1,\ \varphi_1 - \varphi_2 \in \{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\}$



$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2},\ \varphi_1 - \varphi_2 \in \{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\}$

Lissajous-Figuren

Beispiel 4.20

Aus dem Kurvenverlauf der Vektorfunktionen

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \end{pmatrix}^\top \quad (t \geq 0)$$

lassen sich bestimmen:

1. **Amplituden** A_i, $i \in \{1; 2\}$, der Koordinatenfunktionen; beispielsweise:

$$f(t) \in [-2; 2] \times [-2; 2] \Longrightarrow |A_i| = 2.$$

2. **Frequenzverhältnis** $\frac{\omega_1}{\omega_2}$: als Verhältnis der Punktezahlen mit vertikalen und horizontalen Tangenten während eines geschlossenen Umlaufs (s.o.).
3. **Phasendifferenz** $\Delta\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$ gilt; z. B.:[1]
   - $\dot{x}(t) = A_1\omega_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; t_0 = \frac{1}{\omega_1}\left(\frac{2k+1}{2}\pi - \varphi_1\right) \; (k \in \mathbb{Z})$
   - $y(t_0) = A_2 \cdot \sin(\omega_1 t_0 + \varphi_2) \stackrel{!}{=} a$ (ablesen) $\Longrightarrow \Delta\varphi = \arccos\left(\pm\frac{a}{A_2}\right)$

[1] Die Wahl des Vorzeichens in der Formel für $\Delta\varphi$ erfolgt durch die Auswahl von $x(t_0) = \pm A_1$.