Musterlösung

Aufgabe: Man skizziere in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die die Ungleichung $|2z-i|>\sqrt{8}$ erfüllen.

Wir schreiben zunächst die komplexe Zahl in algebraischer Form auf:

$$2z-i=2x+2iy-i=2x+i(2y-1),$$

dann gilt für den Betrag

$$|2z-i|=|2x+i(2y-1)|=\sqrt{(2x)^2+(2y-1)^2}.$$

Die Menge aller komplexen Zahlen mit $|2z-i|>\sqrt{8}$ ist folglich

$$|2z-i|=\sqrt{(2x)^2+(2y-1)^2}>\sqrt{8} \iff (2x)^2+(2y-1)^2>8.$$

Obwohl Quadrieren keine äquivalente Umformung ist, ist diese Umformung äquivalent, da die Wurzelfunktion auf ihrem Definitionsbereich monoton wachsend ist. Ausmultiplizieren führt auf:

$$4x^2+4y^2-4y+1>8 \iff x^2+y^2-y+\frac{1}{4}>2.$$

Quadratisches Ergänzen für y ergibt

$$y^2-y+\frac{1}{4}=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

und damit

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2>2.$$

Weil $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=2$ einen Kreis mit dem Mittelpunkt $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ und dem Radius $\sqrt{2}$ beschreibt, ist die gesuchte Menge aller komplexen Zahlen z mit $|2z-i|>\sqrt{8}$ gerade das Äußere dieses Kreises.

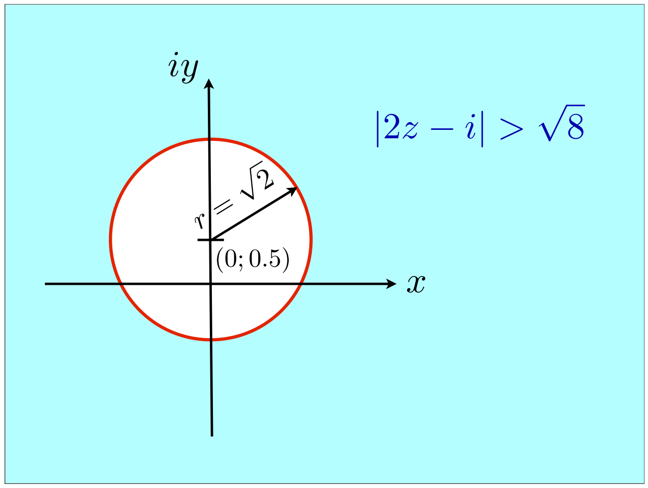

Abbildung 1: Das Äußere des Kreises entspricht der Menge dieser komplexen Zahlen.