

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

# **MATHEMATIK für Medieninformatik**

Prof. Dr. Elena Klimova

Wintersemester 2024

# Informationen zur Lehrveranstaltung

- ▶ Kontakt: marco.hamann@htw-dresden.de
- ▶ Modulux: Modul I382  
`https://apps.htw-dresden.de/app-modulux/frontend/module/`
- ▶ Struktur: Vorlesung + Übung + Repetitorium
- ▶ OPAL: Einschreibung
- ▶ Mitwirkung bei Folien: Dipl.-Math. Markus Klose

Kapitel 1

# Grundlagen

Prof. Dr. Elena Klimova

Wintersemester 2024

## Lernziele dieses Kapitels

In diesem Kapitel lernen Sie allgemeine elementare Begriffe der Mathematik kennen, die für die weitere Beschäftigung mit dem Fach unabdingbar sind. Dazu zählen:

- ▶ Aussagen mathematischer Logik,
- ▶ Aussageformen und Quantoren,
- ▶ Mengen und ihre Verknüpfungen.

Außerdem werden Sie zahlreiche kleine Hilfsmittel kennenlernen, die Sie beim Verständnis des Stoffes unterstützen.

# Inhalt

von Kapitel 1: Grundlagen

## Mathematische Logik

Begriffe

Aussagenverbindungen

Tautologie

Aussageformen

## Mengenlehre

Begriffsbildung

Teilmengen

Mengenoperationen

## Weitere Grundlagen

Gleichungen und Ungleichungen

Summen und Produkte, Vollständige Induktion

Kombinatorik

# Mathematische Logik und Informatik

- ▶ Es gibt viele Verbindungen zwischen mathematischer Logik und Informatik.
- ▶ Personen wie Alan Turing prägten sowohl Logik als auch Informatik.
- ▶ Die sog. *deskriptive Komplexitätstheorie* stellt Zusammenhang zwischen der mathematischen Logik und der Komplexitätstheorie in der theoretischen Informatik her.

# Begriffe

## Aussagen

### Definition (Aussage)

Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, das entweder *wahr* oder *falsch* ist. Aussagen werden im Folgenden mit Großbuchstaben  $A, B, C, \dots$  bezeichnet.

Der **Wahrheitswert** einer Aussage  $A$  ist

$$\text{Wert}(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls die Aussage } A \text{ wahr ist,} \\ 0 & \text{falls die Aussage } A \text{ falsch ist.} \end{cases}$$

# Begriffe

## Aussagen

Hier sind einige Beispiele für verschiedene Arten von mathematischen Aussagen:

- Aussage über Arithmetik:**
  - \* "Die Quadratwurzel von 9 ist gleich 3."
- Aussage über Algebra:**
  - \* "Jede reelle Zahl  $x$  erfüllt die Gleichung  $x^2 - 4 = 0$ ."
- Aussage über Geometrie:**
  - \* "In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse."
- Aussage über Logik:**
  - \* "Wenn  $p$  und  $q$  wahre Aussagen sind, dann ist die Aussage  $\neg p \vee q$  ebenfalls wahr."
- Aussage über Mengenlehre:**
  - \* "Die Menge der Primzahlen ist unendlich."
- Aussage über Wahrscheinlichkeit:**
  - \* "Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl bei einem fairen Wurf eines sechseckigen Würfels zu erhalten, beträgt  $1/2$ ."
- Aussage über Analysis:**
  - \* "Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist auf dem Intervall  $[0, 1]$  stetig."
- Aussage über Kombinatorik:**
  - \* "Die Anzahl der Möglichkeiten, 5 Bücher aus einer Bücherreihe von 10 auszuwählen, beträgt 252."
- Aussage über Zahlentheorie:**
  - \* "Es gibt unendlich viele Primzahlen."

Abbildung: Beispiele von mathematischen Aussagen

# Begriffe

## Aussagen

### Beispiele:

- (i)  $A : \Leftrightarrow „3 + 5 = 9“$
- (ii)  $B : \Leftrightarrow „3 \text{ ist Teiler von } 6.“$
- (iii)  $C : \Leftrightarrow „2^{100} + 1 \text{ ist Primzahl.}“$
- (iv)  $D : \Leftrightarrow „\text{Er ist sympathisch.}“$
- (v)  $E : \Leftrightarrow „2 + x = 4“$
- (vi)  $F : \Leftrightarrow „C \text{ ist eine Sprache.}“$

# Begriffe

## Aussagen

EL

Ist "C ist eine Sprache" eine mathematische Aussage?



Nein, der Satz "C ist eine Sprache" ist keine mathematische Aussage. Eine mathematische Aussage ist eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist und in der Mathematik quantifiziert und untersucht werden kann. Der Satz "C ist eine Sprache" ist eher eine deskriptive oder informatorische Aussage, die keine klare mathematische Bedeutung hat und daher nicht als mathematische Aussage betrachtet wird.

In der Mathematik werden mathematische Aussagen normalerweise in einer präzisen, formalen Sprache formuliert und können dann durch Beweise oder Gegenbeispiele analysiert werden, um ihre Wahrheit oder Falschheit zu bestimmen. Ein Beispiel für eine mathematische Aussage wäre "Die Summe von zwei geraden Zahlen ist immer eine gerade Zahl", da diese Aussage in der Mathematik bewiesen und untersucht werden kann.

**Abbildung:** C ist eine Sprache

# Aussageverbindungen

Symbolik	Bezeichnung	Sprechweise
$\neg A$ bzw. $\bar{A}$	Negation	“nicht $A$ ”
$A \wedge B$	Konjunktion	“ $A$ und $B$ ”
$A \vee B$	Disjunktion, inkl. “Oder”	“ $A$ oder $B$ ”
$A \triangle B$	Kontravalenz, exkl. “Oder”	“entweder $A$ oder $B$ ”
$A \Rightarrow B$	Implikation	<p>“wenn <math>A</math>, dann <math>B</math>”; “aus <math>A</math> folgt <math>B</math>”</p> <p>“<math>A</math> impliziert <math>B</math>”</p> <p>“<math>A</math> ist hinreichend für <math>B</math>”</p> <p>“<math>B</math> ist notwendig für <math>A</math>”</p> <p>“<math>A</math> ist Voraussetzung, <math>B</math> ist Behauptung”</p>
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	<p>“<math>A</math> genau dann, wenn <math>B</math>”</p> <p>“<math>A</math> dann und nur dann, wenn <math>B</math>”</p> <p>“<math>A</math> ist notwendig und hinreichend für <math>B</math>”</p>

# Aussageverbindungen

## Beispiele

- (i) „In der Medieninformatik können Projekte entweder auf *Webentwicklung* oder auf *3D-Modellierung* ausgerichtet sein.“
- Teilaussagen:
  - Verknüpfung:
- (ii) „Wenn jemand grundlegende Kenntnisse in der Bildverarbeitung hat, kann er erfolgreich bei der Entwicklung von Bildfiltern sein.“
- Teilaussagen:
  - Verknüpfung:
- (iii) „Wenn wir die Lehrveranstaltungen nicht besuchen und die Abschlussarbeit von ChatGPT schreiben lassen, dann bestehen wir das Studium nicht.“
- Teilaussagen:
  - Verknüpfung:

# Aussageverbindungen

## Wahrheitstabellen

**Wahrheitstabellen** enthalten die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen. Für die obigen elementaren Aussagenverbindungen ergeben sich:

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \triangle B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

# Aussageverbindungen

## Wahrheitstabellen

**Wahrheitstabellen** enthalten die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen. Für die obigen elementaren Aussagenverbindungen ergeben sich:

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \triangle B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1*	0
0	0	1	0	0	0	1*	1

\* "Ex falso quodlibet."

# Aussageverbindungen

## Wahrheitstabellen – Beispiele

### Aufgabe

Stellen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussageverbindungen jeweils mit Hilfe einer Wahrheitstabelle dar.

- (a) Ein Video-Streaming-Dienst bietet 4k-Inhalte an, oder er verwendet fortschrittliche Videokompressionsalgorithmen.
- (b) Wenn jemand grundlegende Kenntnisse in den Bereichen Grafikprogrammierung und Benutzerschnittstellenentwicklung hat, wird diese/-r in der Lage sein, eine benutzerfreundliche Augmented-Reality-Anwendung (AR) zu entwickeln.

# Aussageverbindungen

Aufgabe: Lösung von (a)

Ein Video-Streaming-Dienst

$P$  .. bietet 4k-Inhalte an.

$Q$  .. verwendet fortschrittliche Videokompressionsalgorithmen.

Die Gesamtaussage lautet:  $P \vee Q$

Wahrheitstabelle:

$P$	$Q$	$P \vee Q$
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0	0	0

# Aussageverbindungen

Aufgabe: Lösung von (b)

Jemand

$P$  .. hat grundlegende Kenntnisse in Grafikprogrammierung.

$Q$  .. hat grundlegende Kenntnisse in Benutzerschnittstellenentwicklung.

$R$  .. ist in der Lage, eine benutzerfreundliche AR-Anwendung zu entwickeln.

Die Gesamtaussage lautet:  $(P \wedge Q) \rightarrow R$

Wahrheitstabelle:

$P$	$Q$	$R$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

# Aussageverbindungen

## Wahrheitstabellen – Beispiele

### Aufgabe (Einbruch)

Es hat einen Einbruch gegeben und die Polizei hat drei Verdächtige festgenommen. Kommissar Moser versucht nun durch logische Schlussfolgerungen den oder die Täter zu ermitteln:

*“Klose ist nicht clever genug sowas alleine durchzuziehen, der würde immer seinen Kumpel Lehmann mitnehmen. Lehmann und Müller können nicht miteinander, die haben garantiert kein Ding zusammen gedreht. Wenn Lehmann oder Müller unschuldig ist, dann muss Klose ein Täter sein.”*

Helfen Sie bei der Aufklärung des Falles!

# Aussageverbindungen

## Tautologie

### Definition (Tautologie)

Eine Aussageverbindung  $T = T(A, B, \dots)$  heißt **Tautologie** (Identität), falls sie für alle möglichen Wahrheitswerte der Teilaussagen  $A, B, \dots$  stets wahr ist.

### Beispiele:

- (i) *Satz vom ausgeschlossenen Dritten:*  $A \vee \neg A$
- (ii) *Kettenschluss:*  $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- (iii) *Abtrennungsregel:*  $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$
- (iv) *Kontraposition:*  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- (v) *Indirekter Beweis:*  $[B \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow A$

# Aussageverbindungen

## Kontradiktion

### Definition (Kontradiktion)

Eine Aussagenverbindung  $T = T(A, B, \dots)$  heißt **Kontradiktion** (logischer Widerspruch), falls sie für alle möglichen Wahrheitswerte der Teilaussagen  $A, B, \dots$  stets falsch ist.

**Beispiel:**     *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch:*      $A \wedge \neg A$

# Aussageverbindungen

## Logische Gleichwertigkeit

### Definition (Logische Gleichwertigkeit)

Zwei Aussagenverbindungen  $S = S(A, B, \dots, K)$  und  $T = T(A, B, \dots, K)$  heißen **äquivalent** bzw. logisch gleichwertig, in Zeichen

$$S(A, B, \dots, K) \Leftrightarrow T(A, B, \dots, K)$$

falls  $\text{Wert}(S) = \text{Wert}(T)$  für alle möglichen Wahrheitswerte der Teilaussagen  $A, B, \dots, K$ <sup>1</sup> gilt.

---

<sup>1</sup>bezogen auf endlich viele Teilaussagen

# Aussageverbindungen

## Regeln und Gesetze

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	Kommutativgesetze
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C,$ $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow A \vee B \vee C$	Assoziativgesetze
$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C),$ $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	Distributivgesetze
$A \wedge A \Leftrightarrow A, \quad A \vee A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	doppelte Verneinung
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	DE MORGAN'sche Gesetze
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$	Auflösen von Implikationen
$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	Auflösen von Äquivalenzen

# Aussageform

## Definition

Zahlen  $\sim$  Variablen:  $x, \dots$   
 Aussagen  $\sim$  Aussageformen:  $A(x), \dots$

### Definition (Aussageform)

Ein sprachliches Gebilde  $A(x)$  mit der Variablen  $x \in X$  heißt **Aussageform** über  $X$ , falls  $A(x)$  für jede Wahl  $x \in X$  eine Aussage ist.<sup>2</sup>

#### Bemerkung:

Aussageformen  $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  können auch mehrstellig sein, d.h. sie hängen von mehreren Variablen  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_k \in X_k$  ab.

---

<sup>2</sup>Das Zeichen  $\in$  wird im Abschnitt zu Mengen eingeführt.

# Aussageformen

## Beispiele (Aussageformen)

(a) Es bezeichne  $\mathbb{N}$  die natürlichen Zahlen,  $n \in \mathbb{N}$ . Betrachte die Aussageform

$$P(n) :\Leftrightarrow \text{“}n \text{ ist eine Primzahl”}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr/falsch?  $P(5)$  bzw.  $P(10)$   
Was ist mit  $P(2^{100} + 1)$ ?

# Aussageformen

## Beispiele (Aussageformen)

- (a) Es bezeichne  $\mathbb{N}$  die natürlichen Zahlen,  $n \in \mathbb{N}$ . Betrachte die Aussageform

$$P(n) :\Leftrightarrow \text{“}n \text{ ist eine Primzahl”}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr/falsch?  $P(5)$  bzw.  $P(10)$   
Was ist mit  $P(2^{100} + 1)$ ?

- (b) Es bezeichne  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen,  $x, a, b \in \mathbb{R}$ . Betrachte die Aussageform

$$Z(x, a, b) :\Leftrightarrow \text{“}x \text{ liegt zwischen } a \text{ und } b\text{”} \quad (a < x < b)$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr/falsch?  $Z(5, 3, 6)$ ,  $Z(1, 2, 3)$   
bzw.  $Z(\pi, 3.1, 3.2)$

# Quantifizierung

- ▶ Der Wahrheitsgehalt einer Aussageform hängt also konkret von den Werten ab, die man in die Aussageform einsetzt.
- ▶ Durch **Quantifizierung** kann man eine Aussageform zu einer Aussage mit eindeutigem Wahrheitsgehalt machen.
- ▶ Quantoren sind mathematische Symbole, die dazu dienen, die Quantifizierung von Variablen in Aussagen zu kennzeichnen.

Bezeichnung	Symbol <sup>3</sup>	Sprechweise
All-Operator	$\forall$	“für alle” bzw. “für jedes”
Existenzoperator	$\exists$	“es existiert (mindestens) ein”

---

<sup>3</sup> Als Symbole sind gespiegelte/gedrehte Buchstaben genutzt, (A)llquantor bzw. (E)xistenzquantor.

# Quantoren

## All- und Existenzaussagen

### Definition (All- und Existenzaussagen)

Es seien der Grundbereich  $X$  und die Aussageform  $H(x)$  mit  $x \in X$  gegeben. Dann erhält man durch Quantifizierung von  $H(x)$  folgende Aussagen:

Bezeichnung	Schreibweise	Sprechweise
Allaussage	$\forall x \in X : H(x)$	Für <b>alle</b> $x$ aus der Menge $X$ gilt $H(x)$ .
Existenzaussage	$\exists x \in X : H(x)$	Es <b>existiert</b> ein $x$ , für welches $H(x)$ gilt.

# Quantoren

## All- und Existenzaussagen – Aufgabe

### Aufgabe (All- und Existenzaussagen)

Schreiben Sie die folgenden Sätze als All- oder Existenzaussagen auf:

- (i) Es gibt natürliche Zahlen, die Primzahlen sind.
- (ii) Alle natürlichen Zahlen sind auch ganze Zahlen.

# Negation von All- und Existenzaussagen

- ▶ Wir haben bereits gelernt, dass man Aussagen auch negieren kann.
- ▶ Da All- und Existenzaussagen ja vor allem auch *Aussagen* sind, kann man sie ebenfalls negieren. Doch was passiert dann mit den Quantoren und der Aussageform?

<b>Negation</b> einer <b>All</b> aussage	$\neg(\forall x \in X : H(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : (\neg H(x))$
<b>Negation</b> einer <b>Existenz</b> aussage	$\neg(\exists x \in X : H(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : (\neg H(x))$

# Negation von All- und Existenzaussagen

- ▶ Wir haben bereits gelernt, dass man Aussagen auch negieren kann.
- ▶ Da All- und Existenzaussagen ja vor allem auch *Aussagen* sind, kann man sie ebenfalls negieren. Doch was passiert dann mit den Quantoren und der Aussageform?

Negation einer <b>All</b> aussage	$\neg(\forall x \in X : H(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : (\neg H(x))$
Negation einer <b>Existenz</b> aussage	$\neg(\exists x \in X : H(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : (\neg H(x))$

## Aufgabe (Negation von All- und Existenzaussagen)

Negieren Sie die folgenden Aussagen und machen Sie Allaussagen zu Existenzaussagen bzw. umgekehrt.

- Alle Studierenden bestehen die Matheprüfung.
- Es gibt Parallelogramme, die keine Rechtecke sind.

Wie verhält sich der Wahrheitswert bei der Aussage (b)?

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

## Selbstreflexion (Mathematische Logik)

1. Sie erklären, was eine mathematische **Aussage** ist und wie sie sich von anderen sprachlich und grammatikalisch korrekten Sätzen unterscheidet.
2. Sie wandeln ausformulierte **Aussageverbindungen** in symbolische Schreibweise um und umgekehrt.
3. Sie bestimmen den **Wahrheitswert** von Aussageverbindungen in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Teilaussagen und ihrer Verknüpfungen und erstellen **Wahrheitstabellen**.
4. Sie unterscheiden **Aussagen** und **Aussageformen** und nennen eigene Beispiele.
5. Sie formulieren mathematisch quantifizierbare Aussageformen vermöge der entsprechenden **Quantoren** und negieren diese.

# Inhalt

## von Kapitel 1: Grundlagen

### Mathematische Logik

Begriffe

Aussagenverbindungen

Tautologie

Aussageformen

### Mengenlehre

Begriffsbildung

Teilmengen

Mengenoperationen

### Weitere Grundlagen

Gleichungen und Ungleichungen

Summen und Produkte, Vollständige Induktion

Kombinatorik

# Begriffsbildung

## Definition (Menge)

Eine **Menge**  $M$  ist die Gesamtheit bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von jedem Objekt eindeutig feststeht, ob es zu  $M$  gehört oder nicht. Die zu  $M$  gehörigen Objekte heißen **Elemente** von  $M$ .

**Schreibweisen:**<sup>4</sup>

$a \in M$ :  $a$  ist Element von  $M$ .  $a \notin M$ :  $a$  ist kein Element von  $M$ .

**Bemerkungen:**

- ▶ Die **leere Menge**  $\emptyset$  bzw.  $\{\}$  enthält keine Elemente.
- ▶ Die Grundmenge  $G$  enthält sämtliche Objekte des Grundbereiches, der in einem bestimmten Zusammenhang betrachtet wird.

---

<sup>4</sup>Mengen werden im Folgenden mit Großbuchstaben  $M, A, B, \dots$  und ihre Elemente mit Kleinbuchstaben  $x, a, b, \dots$  bezeichnet.

# Begriffsbildung

## Darstellung von Mengen

Mengen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden, u.a. durch:

(a) *Aufzählung aller ihrer Elemente*

Es sei  $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Dann gilt

$$x \in M \iff (x = a_1) \vee (x = a_2) \vee \dots$$

(b) *Angabe einer charakteristischen Eigenschaft*

$$M = \{x \in G \mid E(x)\}$$

Gesprochen: "M ist die Menge aller x aus G, für die E(x) gilt."

$$x \in M \iff x \in G \wedge \text{Wert}(E(x)) = 1$$

(c) *Graphisch*

z. B. durch VENN-Diagramme.

# Begriffsbildung

## Darstellung von Mengen – Beispiele

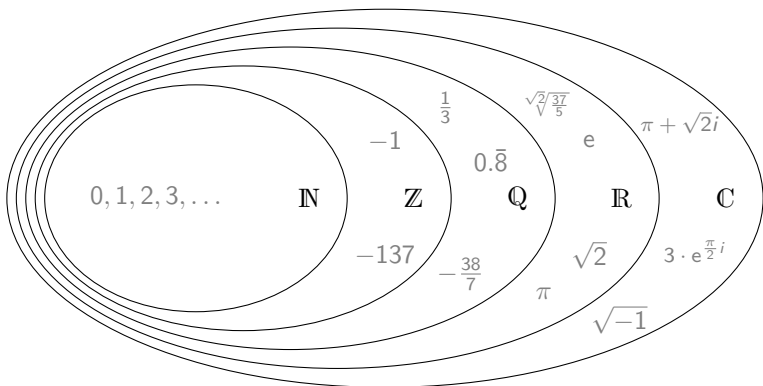
- (i)  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_+ := \{1, 2, 3, \dots\}$
- (ii)  $\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$
- (iii)  $V_k := \{x \in \mathbb{N} \mid x = k \cdot n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \{0, k, 2k, 3k, \dots\}$  für  $k \in \mathbb{N}_+$
- (iv)  $T_k := \{x \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } x\}$  für  $k \in \mathbb{N}_+$

**Frage:** In welcher Beziehung stehen  $V_k$  und  $T_k$  zueinander?

(v)  $L = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} \stackrel{?}{=} \{ \quad , \quad \}$

# Begriffsbildung

## Standardmengen – Darstellung mittels VENN-Diagrammen



# Begriffsbildung

## Standardmengen

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_+$	Menge der positiven natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen $\left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}_+ \right\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{I}$	Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen $\{z \mid z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \text{ und } i^2 = -1\}$
$\mathbb{H}$	Menge der Quaternionen

# Teilmengen von $\mathbb{R}$

## Intervalle

In  $\mathbb{R}$  kann man auch **Intervalle** nutzen. Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$  gilt:

Symbol	Bedeutung	Sprechweise
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall von $a$ bis $b$
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	rechtsseitig halboffenes Intervall von $a$ bis $b$
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	linksseitig halboffenes Intervall von $a$ bis $b$
$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes Intervall von $a$ bis $b$

Bei (halb-) offenen Intervallen ist auch  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  möglich.

# Teilmengen von $\mathbb{R}$

## Intervalle – Aufgabe

### Aufgabe (Intervalle)

(a) Tragen Sie die folgenden Intervalle auf dem Zahlenstrahl ab:

$$[3, 5), \quad [-1, 2], \quad (-\infty, 0], \quad (5, \infty)$$

(b) Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervalle und tragen Sie sie auf dem Zahlenstrahl ab:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$$

# Begriffe

## Mengengleichheit und Teilmengen

### Definition (Mengengleichheit)

Die Mengen  $A$  und  $B$  sind **gleich**, kurz  $A = B$ , wenn sie dieselben Elemente besitzen, d. h. wenn alle Elemente zu  $A$  gehören genau dann, wenn sie auch zu  $B$  gehören:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

### Definition (Teilmenge)

$A$  ist **Teilmenge** von  $B$ , geschrieben  $A \subseteq B$ , wenn alle Elemente von  $A$  auch zu  $B$  gehören:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \implies x \in B)$$

$A$  ist **echte Teilmenge** von  $B$ , geschrieben  $A \subset B$ , wenn alle Elemente von  $A$  auch zu  $B$  gehören, aber  $A$  und  $B$  verschieden voneinander sind:<sup>5</sup>

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

<sup>5</sup> d. h.  $B$  muss mindestens ein Element haben, das nicht zu  $A$  gehört

# Teilmengen

## Mengengleichheit und Teilmengen – Bemerkung und Beispiele

Alternativ lässt sich mittels der Teilmengenbeziehung erklären:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

### Aufgabe (Teilmengenbeziehungen)

Welche Beziehungen gelten zwischen folgenden Mengen?

$$A := \{0, 1, 2\}, \quad B := \{2, 1, 0\}, \quad C := \{0, 2\}$$

# Teilmengen

## Mächtigkeit von Mengen

### Definition (Mächtigkeit)

Die **Mächtigkeit** einer endlichen Menge  $A$ , geschrieben  $|A|$  (auch  $\#A$ ), ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist **abzählbar**, falls ihre Elemente nummeriert werden können (z.B.:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ); andernfalls ist sie **überabzählbar** (z.B.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ).

### Aufgabe (Mächtigkeit)

- (a) In Python sei das Array `arr = [2,4,6,8,10,12,14]` gegeben.  
Wie groß ist die Mächtigkeit dieses Arrays?
- (b) Wie groß ist die Mächtigkeit der Menge  $S(n)$  aller *Bitstrings* der Länge  $n$  (wobei  $n \in \mathbb{N}_+$ )?

# Mengenoperationen

## Übersicht

Es sei die Grundmenge  $G$  gegeben und es gelte  $A, B \subseteq G$ .

Symbolik	Bezeichnung	Sprechweise	Bedeutung
$A \cap B$	Durchschnitt	"A geschnitten B"	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
$A \cup B$	Vereinigung	"A vereinigt B"	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$A \setminus B$	Differenz	"A ohne B"	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
$\bar{A} (= G \setminus A)$	Komplement von A bzgl. G	"A Komplement"	$\{x \mid x \in G \wedge x \notin A\}$
$A \Delta B$	Symmetrische Differenz	"A symmetrische Differenz B"	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

**Frage:** Wie kann man diese Mengenoperationen graphisch als VENN-Diagramme darstellen?

# Mengenoperationen

## Aufgabe (Mengenoperationen)

Gegeben (siehe Beispiel oben):

- ▶  $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$
- ▶  $T_k = \{x \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } x\}$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

- |                                 |                                      |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $T_3 \cap T_2$              | (f) $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 5\}$ |
| (b) $\mathbb{P} \cap T_3$       | (g) $[1, 5) \cap (3, 7]$             |
| (c) $\mathbb{P} \cap T_4$       | (h) $[1, 5) \cup (3, 7]$             |
| (d) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 5\}$ | (i) $[1, 5) \setminus (3, 7]$        |
| (e) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 5\}$ |                                      |

**Frage:** Finden Sie den Unterschied zwischen  $\{1, 3\}$  und  $(1, 3)$ .

# Mengenoperationen

## Venn-Diagramme – Aufgabe

### Aufgabe (VENN-Diagramme)

Unter 100 Studierenden wird eine Umfrage nach deren Lieblingssportart durchgeführt, wobei nur nach Schwimmen, Volleyball und Fußball gefragt wird. Es stellt sich heraus, dass 12 Studierende gern Fußball spielen, aber weder für Volleyball noch für Schwimmen zu begeistern sind. Fünf Befragte spielen gern Volleyball, aber nicht Fußball, und gehen auch nicht schwimmen. 50 Studierende betreiben genau zwei der Sportarten gern, darunter 25, die gern Fußball und Volleyball spielen, und zehn, die gern Fußball spielen und gern Schwimmen gehen. Genau acht Befragte betreiben alle drei Sportarten gern und 13 machen am liebsten gar keinen Sport.

- (a) Wieviele Studierende gehen gern schwimmen, aber spielen weder gern Volleyball noch Fußball?
- (b) Wieviele Studierende schwimmen nicht gerne?
- (c) Wieviele Studierende, die gern Fußball spielen, spielen nicht gern Volleyball?

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

# Mengenoperationen

## Venn-Diagramme – Lösung

Aus dem Text ist gegeben:

12 Stud. betreiben F, aber nicht S und nicht V.  
5 Stud. betreiben V, aber nicht F und nicht S.

8 Stud. betreiben F, S und V.

F: Menge der Studenten, die gern  
Fußball spielen

V: Menge der Studenten, die gern  
Volleyball spielen

S: Menge der Studenten, die gern  
schwimmen gehen

50 Stud. betreiben genau 2 Sportarten,  
davon betreiben 25 Stud. F und V,  
10 F und S.

13 Stud. betreiben keinerlei Sport.

### Antworten:

- (a) 12 Studenten gehen gern schwimmen und betreiben keine der anderen Sportarten
- (b) 55 Studenten schwimmen nicht gern
- (c) 22 Studenten spielen gern Fußball, aber nicht gern Volleyball

# Mengenoperationen

## Wichtige Rechengesetze – Teil I

Rechengesetze	Bezeichnung
$A \subseteq A$	Reflexivität
$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$	Transitivität
$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$	Kommutativität
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C,$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$	Assoziativität
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität

# Mengenoperationen

## Wichtige Rechengesetze – Teil II

Rechengesetze	Bezeichnung
$A \cap A = A, \quad A \cup A = A$	Idempotenz
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Formeln von DE MORGAN
$A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = G, \quad \overline{\overline{A}} = A$	Operationen mit Komplement
$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A, \quad \emptyset \subseteq A$	Operationen mit leerer Menge
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	Auflösen einer Differenz

# Mengenoperationen

## Aufgabe

### Aufgabe (Mengenoperationen)

Es seien die Mengen  $A := \{0, 1, 2\}$  und  $B := \{-1, 1\}$  gegeben.

Welche Elemente liegen in

$$A \cap (B \setminus \overline{A})? \quad (*)$$

*Hinweis:* Vereinfachen Sie die Formel in (\*) zunächst mit geeigneten Mengenoperationen, um zur Lösung zu gelangen.

# Mengenoperationen

## Aufgabe

### Lösung

$$\begin{aligned}A \cap (B \setminus \bar{A}) &= A \cap (\overline{(\bar{A})} \cap B) && \text{(Auflösen einer Differenz)} \\ &= A \cap (A \cap B) && \text{(Operation mit dem Komplement)} \\ &= (A \cap A) \cap B && \text{(Assoziativität)} \\ &= A \cap B && \text{(Idempotenz)} \\ &= \{0, 1, 2\} \cap \{-1, 1\} && \text{(Einsetzen der gegebenen Mengen)} \\ &= \{1\}\end{aligned}$$

# Mengenoperationen

## $n$ -Tupel

### Definition (Geordnetes $n$ -Tupel)

Es seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann heißt  $(a_1, \dots, a_n)$  **geordnetes  $n$ -Tupel** reeller Zahlen.<sup>6</sup>

#### Bemerkungen:

- ▶ Im Unterschied zur Aufzählung von Elementen einer Menge spielt im  $n$ -Tupel die **Reihenfolge** der  $a_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) eine Rolle.
- ▶ Die Gleichheit zweier  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $(b_1, \dots, b_n)$  ist definiert als

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \quad :\Leftrightarrow \quad a_i = b_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

- ▶ Beispiele: Koordinaten eines Punktes in der  $xy$ -Ebene (*kartesisches Koordinatensystem*), Vektoren.

---

<sup>6</sup>Achtung: Das Intervall  $(1, 3)$  und das Tupel  $(1, 3)$  lassen sich nur aus dem Kontext unterscheiden.

# Mengenoperationen

## Kartesisches Produkt

### Definition (Kartesisches Produkt)

Es seien die zwei Mengen  $A$  und  $B$  gegeben. Dann heißt

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

**kartesisches Produkt** der Mengen  $A$  und  $B$ .

Für mehr als zwei Mengen lässt sich diese Definition wie folgt verallgemeinern:

- ▶  $A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\},$
- ▶  $A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}.$

# Mengenoperationen

## Kartesisches Produkt – Beispiele

(i) Schachbrett

$$(ii) \{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

$$(iii) \{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = ?$$

$$(iv) \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(v) [0, 1] \times (-1, 2]$$

$$(vi) (-1, 2] \times [0, 1]$$

Stellen Sie die Mengen in (v) und (vi) in einem kartesischen Koordinatensystem dar!

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

## Selbstreflexion (Mengenlehre)

1. Sie stellen **Mengen** auf verschiedene Art und Weise dar.
2. Sie beschreiben und vergleichen **Standardmengen** und **Intervalle**.
3. Sie erklären Mengenoperationen und Mengenbeziehungen anhand von **Venn-Diagrammen**.
4. Sie unterscheiden Mengen nach ihrer **Mächtigkeit**.
5. Sie führen **Mengenoperationen** durch.
6. Falls möglich formulieren Sie Mengenverknüpfungen unter der Verwendung geeigneter **Gesetze** um.
7. Sie erklären den Unterschied von Mengen und **Tupeln**.
8. Sie bilden ein **kartesisches Produkt** von zwei oder mehreren Mengen.

# Inhalt

## von Kapitel 1: Grundlagen

### Mathematische Logik

Begriffe

Aussagenverbindungen

Tautologie

Aussageformen

### Mengenlehre

Begriffsbildung

Teilmengen

Mengenoperationen

### Weitere Grundlagen

Gleichungen und Ungleichungen

Summen und Produkte, Vollständige Induktion

Kombinatorik

# Gleichungen und Ungleichungen

## Lineare Gleichungen

### Aufgabe (Lineare Gleichungen)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen<sup>7</sup> mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

(a)  $2x - \frac{2}{3} = 0$

(b)  $17 - 6x = 2x - 23 - 8x$

(c)  $2(6 - 5x) + 3 = 3(3x - 1) - x$

---

<sup>7</sup>(Warum heißen sie so?)

# Gleichungen und Ungleichungen

## Quadratische Gleichungen

### Aufgabe (Quadratische Gleichungen)

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe geeigneter Lösungsmethoden:

(a)  $-x^2 - 5x = -36$

(b)  $x^2 + 7x = 0$

(c)  $2x^2 - 8x = 2x - 12$

(d)  $x^2 + 2x = -5$

(e)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

Zusatz:  $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$

#### Tipps und Tricks

Die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

lässt sich bestimmen mit:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Liegt die quadratische Gleichung in *Normalform*

$$x^2 + px + q = 0 \text{ mit } p, q \in \mathbb{R}$$

vor, so gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

# Gleichungen und Ungleichungen

## Satz von VIETA

Manchmal kann der folgende Satz beim Auffinden der Lösungen von quadratischen Gleichungen helfen.

### Satz (Satz von VIETA)

Es sei die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

gegeben. Weiter seien  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  die Lösungen dieser Gleichung. Dann ist

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

### Aufgabe (Quadratische Gleichungen)

(a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

(b)  $x^2 - 8x + 7 = 0$

# Gleichungen und Ungleichungen

## Lineare und quadratische Ungleichungen

### Aufgabe (Ungleichungen)

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen. Was müssen Sie hier beachten?

(a)  $2x - 2 < 5x + 1$

(d)  $x^2 - 5x + 6 > 0$

(b)  $5(x - 4) \geq 2(5 - 4x) - 6 + x$

(e)  $x^2 + 4x + 13 \geq 0$

(c)  $ax < x + a, a \in \mathbb{R}$

(f)  $8(2 - x) > -x^2$

# Gleichungen und Ungleichungen

## Gleichungen mit zwei Variablen

### Aufgabe (Graphische Lösung)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen graphisch:

(a)  $2x + y = 2$

(b)  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

# Gleichungen und Ungleichungen

## Allgemeine Kreisgleichung

Um die allgemeine Kreisgleichung eines Kreises zu erstellen, verwenden wir die folgende Form:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- ▶  $(a, b)$  sind die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises.
- ▶  $r$  ist der Radius des Kreises.

Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $(a, b)$  und dem Radius  $r$ .

# Gleichungen und Ungleichungen

## Ungleichungen mit zwei Variablen

### Aufgabe (Graphische Lösung)

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen graphisch:

(a)  $2x + y \leq 2$

(b)  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 > 4$

# Gleichungen und Ungleichungen

## Spezielle Bruchungleichungen

### Aufgabe (Graphische Lösung)

Lösen Sie die Ungleichung

$$\frac{(x-3)^2 \cdot (x+3)^3 \cdot (x-5) \cdot x^6}{(x-3) \cdot (x+8)} \leq 0$$

Wie ändert sich die Lösung, wenn man „ $\leq$ “ durch „ $<$ “ ersetzt?

# Gleichungen und Ungleichungen

## Betrag

### Definition (Betrag)

Der Betrag einer reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

# Gleichungen und Ungleichungen

## Betragsgleichungen und -ungleichungen

### Aufgabe (Betragsgleichungen)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Betragsgleichungen:

(a)  $|x| - 3 = 0$

(c)  $|3 - 4x| = 3 \cdot |2x + 6|$

(b)  $|5x - 9| = 4$

(d)  $|2x - 1| = x^2$

### Aufgabe (Betragsungleichungen)

Lösen Sie die folgenden linearen Betragsungleichungen:

(a)  $|x - 3| \leq 0$

(b)  $|x + 3| < 4$

(c)  $|2x + 1| > 1$

## Selbstreflexion (Gleichungen und Ungleichungen)

1. Können Sie mithilfe von **Äquivalenzumformungen** eine Gleichung nach der gesuchten Variablen umstellen?
2. Verwenden Sie geeignete **Lösungsformeln**, einschließlich des Satzes von Vieta, um lineare und quadratische Gleichungen zu lösen?
3. Beherrschen Sie die Lösung verschiedener Arten von **Ungleichungen**?
4. Sind Sie in der Lage, Gleichungen und Ungleichungen mit zwei Variablen in einem  $xy$ -Koordinatensystem grafisch zu lösen?
5. Können Sie die **allgemeine Kreisgleichung** eines Kreises erkennen und erstellen?
6. Lösen Sie **Bruchungleichungen** mithilfe graphischer Methoden?
7. Definieren Sie den Betrag einer reellen Zahl und können Sie **Betragsgleichungen** und -Ungleichungen mithilfe der Definition des Betrags lösen?

# Summen und Produkte

- ▶ Selbstverständlich kennen Sie Summen und Produkte bereits aus der Schule.
- ▶ Wenn man zwei Zahlen  $a$  und  $b$  addiert, dann schreibt man einfach  $a + b$ .
- ▶ Bei der Multiplikation schreiben wir wiederum  $a \cdot b$ .
- ▶ Doch wie sieht es aus mit solch einer Summe?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} = ??$$

- ▶ Oder solch einem (endlichen) Produkt?

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \dots \frac{1}{20} = ??$$

- ▶ Offenbar ist klar, welche Summanden bzw. Faktoren bei den ... eingetragen werden müssen. Gibt es also eine kompaktere Schreibweise?

# Summen und Produkte

## Definition (Summenzeichen, Produktzeichen)

Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$  und  $a_k$  eine Folge von Zahlen.

Dann wird das **Summenzeichen** wie folgt definiert:

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Analog definiert man das **Produktzeichen** als

$$\prod_{k=0}^n a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

### Bemerkungen:

- ▶ Für den *Summationsindex*  $k$  kann man jeden beliebigen Buchstaben verwenden.
- ▶ Der *Startwert* des Summationsindex ist ebenfalls beliebig (s. nächste Folie).

# Summen und Produkte

## Aufgabe (Summen und Produkte)

(a)  $\sum_{i=5}^8 (2i - 7) = ?$

(b)  $\prod_{i=1}^{10} i = ?$

(c) Schreiben Sie den Term

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10} = ?$$

mit dem Summenzeichen.

(d) Schreiben Sie den Term

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{20} = ?$$

mit dem Produktzeichen.

# Vollständige Induktion

Beispiel: Der Schüler Carl Friedrich Gauß

## Aufgabe (Der Schüler CFG)

Berechnen Sie bitte die Summe aller Zahlen von 1 bis 100.

*Hinweis: Gauß schaffte das als Schüler (angeblich) in wenigen Minuten.*

Wie lässt sich diese Aufgabe mit dem Summenzeichen darstellen?

# Vollständige Induktion

## Beweisprinzip

### Satz (Beweisprinzip der vollständigen Induktion)

Es sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  (oder sogar  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ) und  $A(n)$  für jedes  $n \geq n_0$  eine Aussage. Um die Gültigkeit von  $A(n)$  für alle  $n \geq n_0$  zu beweisen, genügt es zu zeigen:

- (IA) Induktionsanfang:  $A(n_0)$  ist korrekt.
- (IS) Induktionsschritt: Für ein beliebiges  $n \geq n_0$  gilt:  
Falls  $A(n)$  richtig ist, so ist auch  $A(n+1)$  richtig.

# Vollständige Induktion

## Beispiel: Der Student Carl Friedrich Gauß

Zurück zu dem Beispiel vom Schüler Gauß. Er ist mittlerweile groß geworden und fragt sich, ob seine Lösung denn für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wie lautet die Aussage  $A(n)$ , die er beweisen muss?

# Vollständige Induktion

Beispiel: Der Student Carl Friedrich Gauß

## Aufgabe (Der Student CFG)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$A(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

# Vollständige Induktion

Beispiel: Ungerade Zahlen und Quadratzahlen

## Aufgabe (Summe ungerader Zahlen)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage:

$$A(n) : \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

*Frage:* Was bedeutet dieser Zusammenhang eigentlich verbal?

## Selbstreflexion (Summen, Produkte, Vollständige Induktion)

1. Sie wandeln Summen-/Produktterme in **Summen-/Produktschreibweise** um und vice versa.
2. Sie erklären das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion**.
3. Sie sehen konkreten Aufgabestellungen an, dass **vollständige Induktion** ein geeignetes Beweisverfahren darstellt, und verwenden diese.

# Weitere Grundlagen

## Binomialkoeffizient

Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $n!$  die **Fakultät** von  $n$ . Sie ist definiert als

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^n i, \quad 0! := 1.$$

### Definition (Binomialkoeffizient)

Der **Binomialkoeffizient** gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  verschiedenen Objekten auswählen kann – er ist also die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge. Er ist für  $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$ , definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}. \quad \text{Sprich: "n über k".}$$

# Kombinatorik

## Binomialkoeffizient – Eigenschaften

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{falls } n < k$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (\text{Symmetrie des Binomialkoeffizienten})$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

# Kombinatorik

## Binomialkoeffizient – Pascal'sches Dreieck

Unter Ausnutzung der Eigenschaften des Binomialkoeffizienten lässt sich das **Pascal'sche Dreieck** visualisieren:

# Kombinatorik

## Binomischer Lehrsatz – Aufgabe

### Aufgabe (Binomischer Lehrsatz)

Berechnen Sie nacheinander  $(x + y)^2$ ,  $(x + y)^3$ ,  $(x + y)^4$ , indem Sie jeweils das Ergebnis mit  $(x + y)$  multiplizieren. Was fällt Ihnen auf?

# Kombinatorik

## Binomischer Lehrsatz

### Satz (Binomischer Lehrsatz)

Für  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

- ▶ Für  $n = 2$  ergeben sich die bekannten **binomischen Formeln** aus der Schule.

# Kombinatorik

## Binomischer Lehrsatz – Aufgabe

### Aufgabe (Binomischer Lehrsatz)

(a) Wie lautet die Formel für  $(x - y)^n = \dots$ ?

(b) Was ergibt  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ?

# Kombinatorik

## Produktregel

### Satz (Produktregel der Kombinatorik)

Die Anzahl der Möglichkeiten in einem  $k$ -stufigen Prozess berechnet man durch

$$\prod_{k=1}^n n_k,$$

wobei  $n_k$  gerade die Anzahl der Möglichkeiten in der  $k$ -ten Stufe ist.

### Aufgabe (Anzahl möglicher Bildkombinationen)

Annahme, Sie arbeiten an einer Animation für ein Videospiel oder einen Film. In dieser Animation gibt es 5 verschiedene Charaktere, 3 verschiedene Hintergründe und 4 verschiedene Requisiten. Sie möchten eine Szene erstellen, indem Sie einen Charakter, einen Hintergrund und eine Requisite auswählen. Wie viele verschiedene Bildkombinationen können Sie erstellen, ohne die gleiche Kombination zu wiederholen?

# Kombinatorik

## Potenzmenge

### Aufgabe (Potenzmenge)

Die **Potenzmenge**  $\mathcal{P}(M)$  von einer Menge  $M$  ist die **Menge aller Teilmengen** von  $M$ .

- (a) Es sei die Menge  $M = \{0, 1\}$  gegeben. Schreiben Sie die  $\mathcal{P}(M)$  auf. Wie groß ist die Mächtigkeit von der Potenzmenge?
- (b) Wie viele Elemente enthält dann die Potenzmenge einer  $n$ -elementigen Menge  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ?

# Kombinatorik

## Abzählende Kombinatorik – Begriffe

- Permutation** beliebige Anordnung von  $n$  Elementen
- Variation** Auswahl von  $k$  aus  $n$  Elementen  
**unter** Berücksichtigung der Anordnung
- Kombination** Auswahl von  $k$  aus  $n$  Elementen  
**ohne** Berücksichtigung der Anordnung

# Kombinatorik

## Abzählende Kombinatorik – Auswahl

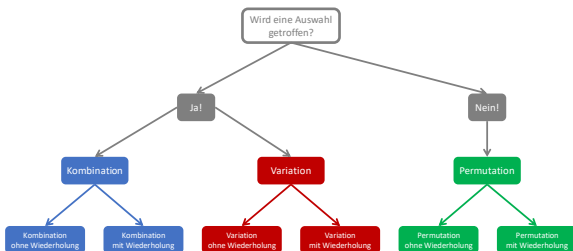


Abbildung: Beispiele von mathematischen Aussagen

# Kombinatorik

## Abzählende Kombinatorik – Abzählformeln

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Permutation	$P(n) = n!$	$P^W(n; g_1, \dots, g_r) = \frac{n!}{g_1! \cdot g_2! \cdot \dots \cdot g_r!}$
Variation	$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V^W(n, k) = n^k$
Kombination	$K(n, k) = \binom{n}{k}$	$K^W(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$

# Kombinatorik

## Abzählende Kombinatorik – Abzählformeln – Aufgabe

### Aufgabe

- (a) Wie viele Binärzahlen kann man mit einem 8-Bit-System darstellen?
- (b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um 5 Äpfel auf 3 Kinder aufzuteilen?

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

## Selbstreflexion (Kombinatorik)

1. Sie berechnen **Fakultäten** von natürlichen Zahlen.
2. Sie berechnen **Binomialkoeffizienten** effizient unter Ausnutzung ihrer Eigenschaften.
3. Sie nutzen das **Pascal'sche Dreieck** als Hilfsmittel und schreiben es zur Unterstützung Ihrer Berechnungen aus dem Kopf als Nebenrechnung auf das Übungsblatt.
4. Sie nutzen den **Binomischen Lehrsatz** zur Auflösung von Binomen.
5. Sie unterscheiden verschiedene **Auswahlmöglichkeiten**.
6. Sie benennen die zur einer Auswahlmöglichkeit passende **Abzählformel** oder leiten diese intuitiv her.