Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Prof. Dr. M. Hamann, Dipl.-Math. techn. T. Etling Dresden, 13. Januar 2023

Algebra und höhere Mathematik 1 für Medieninformatik - WS2022/23
Übung 6: Vollständige Induktion

Aufgaben mit Lösungshilfe

Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise und -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Wandeln Sie folgende im Dezimalsystem gegebene Zahlen in das Dualsystem um:

(a) $35,75$
(b) $-0,95$
(c) -711
(d) $0,3$

Aufgabe 2: Transformieren Sie die Zahlen in das Dezimalsystem:

(a) $(11\,0101,01\,0111)_2$
(b) $(11,0\,0011)_2$
(c) $(AB,CDE)_{16}$
(d) $(3C,FF)_{16}$

Aufgabe 3:

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen durch Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar.

$z_1 = 3 - 4\mathfrak{i}$ $\quad z_2 = -2 + 3\mathfrak{i}$ $\quad z_3 = -5 - 2\mathfrak{i}$

$z_4 = 3$ $\quad z_5 = -\frac{3}{2}\mathfrak{i}$ $\quad z_6 = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\mathfrak{i}\right)$

$z_7 = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\mathfrak{i}$ $\quad z_8 = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\mathfrak{i}$

(b) Bestimmen Sie in der Gaußschen Zahlenebene (siehe Abbildung 1) die durch Zeiger dargestellten komplexen Zahlen.

Aufgabe 4: Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 3\mathfrak{i}$ und $z_2 = 5 - 2\mathfrak{i}$.

(a) Berechnen Sie $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

(b) Geben Sie zu z_1 und z_2 jeweils die Inversen bezüglich der Addition und Multiplikation in der kartesischen Form $a + \mathfrak{i}b$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) an.

(c) Berechnen Sie $(z_1 + \mathfrak{i}z_2)^3$.

Wiederholen Sie die Aufgaben (a) bis (c) für die Zahlenpaare

(i) $z_1 = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathfrak{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ und $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathfrak{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

(ii) $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \mathfrak{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ und $z_2 = 2\sqrt{3} - 2\mathfrak{i}$.

Hinweis: Wandeln Sie hierfür - wo nötig - die komplexen Zahlen in eine geeignete Darstellungsform um.

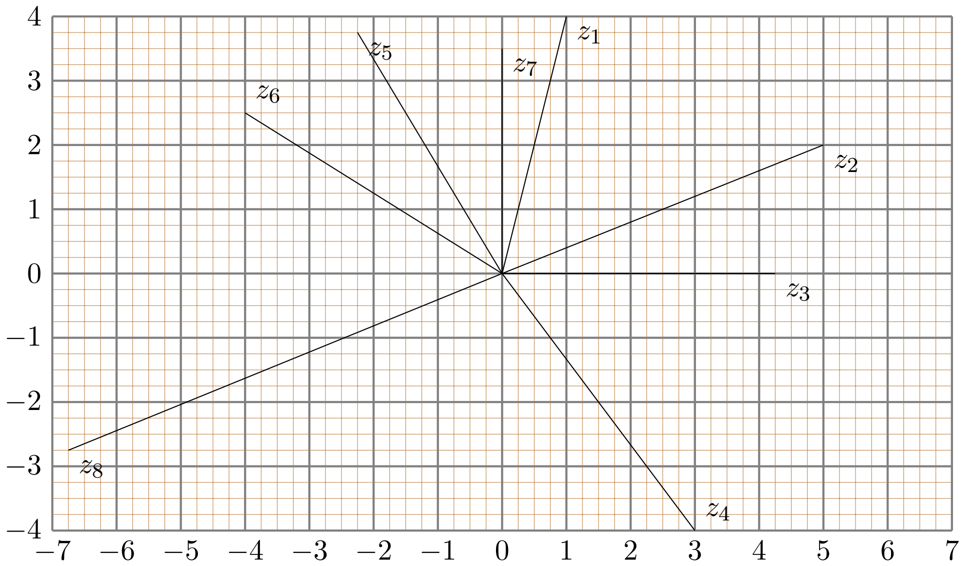

Abbildung 1: Komplexe Zahlen $z_i \in \mathbb{C}$ mit $i \in \{1; 2; \ldots; 8\}$, die durch Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt sind. (Die Pfeilspitzen liegen auf dem Gitterraster.)

Aufgabe 5:

(a) Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, für welche die komplexen Zahlen

$$z_1 = (3a - 5) + (a + b^2)\mathfrak{i} \quad \text{und} \quad z_2 = (2a - 7) - (3a + 7)\mathfrak{i}$$

gleich sind.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die $z = \bar{z}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass genau für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) = 0$ gilt: $z = -\bar{z}$.

Aufgabe 6: Gegeben sind zwei beliebige komplexe Zahlen $z_j \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$, in Polardarstellung

$$z_j = |z_j| \left(\cos\varphi_j + \mathfrak{i}\sin\varphi_j\right), \ |z_j| \in \mathbb{R}^+, \ \varphi_j \in (-\pi, \pi]$$

(a) Berechnen Sie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis unter Verwendung der Additionstheoreme für Winkelfunktionen.

(b) Formulieren Sie eine Regel für die Division komplexer Zahlen in Polardarstellung. [1]

Aufgabe 7:

(a) Bestimmen Sie jeweils die Teilmenge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$ zu den nachstehenden Betragsgleichungen und -ungleichungen.

$$\text{(i)} \quad |z - 3 - \mathfrak{i}| = 1, \quad \text{(ii)} \quad |z + 2| \leq 2, \quad \text{(iii)} \quad |z - \mathfrak{i}| < 2 \wedge |z - 1 - \mathfrak{i}| = 1.$$

(b) Geben Sie ebenso jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{R}$ an.

(c) Kennzeichnen Sie die Teilmengen aus (a) und (b) in der Gaußschen Zahlenebene.

[1] Die Regel kann in Analogie zu der für die Multiplikation komplexer Zahlen, die in Polardarstellung gegeben sind, formuliert werden.

Selbstständige Bearbeitung

Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den „Aufgaben mit Lösungshilfe“ an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 8: Stellen Sie die (Dezimal-)Zahl

$$2022$$

(a) als Binärzahl dar;

(b) als Hexadezimalzahl dar.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, so dass für die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z = \left(x^2 + 2x - 3\right) + \mathfrak{i}\left(x^2 - 4\right) \qquad \left(\mathfrak{i}^2 = -1\right)$$

gelten: (a) $\Re(z) = 0$ (b) $\Im(z) = 0$. Geben Sie die Zahlen z an.

Aufgabe 10: Gegeben sei die Formel für eine endliche Summe

$$\sum_{k=0}^{4}\left(e^{ikx}\right) = \frac{1 - \left(e^{ix}\right)^5}{1 - e^{ix}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

worin $e = 2.7182818...$ die Eulerzahl und i die imaginäre Einheit bezeichnen, d. h. es gilt $i^2 = -1$.

(a) Stellen Sie die linke Seite der Gleichung (1) ohne Verwendung des Summenzeichens dar.

(b) Stellen Sie linke und rechte Seite der Gleichung (1) unter Benutzung der Formel von Moivre

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}$$

als Summe $a(x) + i \cdot b(x)$ dar, worin $a(x)$ bzw. $b(x)$ den Real- bzw. Imaginärteil bezeichnen.

(c) Leiten Sie aus der Formel (1) eine Formel für den Realteil ab.

Aufgabe 11: Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils die gesuchten Größen.

(a) $z = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) - \mathfrak{i}\,\sin(\frac{\pi}{3}))$ ges.: trigonometrische Form, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$

(b) $z = -3e^{\mathfrak{i}\frac{\pi}{3}}$ ges.: z und $\overline{z}$ in exponentieller Form

(c) $z = \left(e^{\frac{\pi}{2}\mathfrak{i}} + \sqrt{3}\right) \cdot \mathfrak{i}$ ges.: $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Arg}(z)$

(d) $z = \dfrac{1 - e^{\frac{3}{2}\pi\mathfrak{i}}}{1 + \mathfrak{i} \cdot e^{-\pi\mathfrak{i}}}$ ges.: arithmetische und exponentielle Form

Aufgabe 12: Bestimmen Sie die arithmetischen Darstellungen der folgenden komplexen Zahlen

(a) $z = \dfrac{3 + 4\mathfrak{i}}{5} + \dfrac{5}{3 + 4\mathfrak{i}}$

(b) $z = \dfrac{1 + \mathfrak{i}}{1 - \mathfrak{i}} + \dfrac{4\mathfrak{i}}{1 + \mathfrak{i}} + 1$

(c) $z = \dfrac{(2 + \mathfrak{i})^3}{2 - 3\mathfrak{i}}$

(d) $z = \dfrac{3 + 6\mathfrak{i}}{2 + \mathfrak{i}^3} - \dfrac{10\mathfrak{i}^4}{(1 + \mathfrak{i})^2}$

worin $\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{i}^2 = -1$ die imaginäre Einheit bezeichnet.