BERUFSAKADEMIE SACHSEN
STAATLICHE STUDIENAKADEMIE
RIESA
UNIVERSITY OF COOPERATIVE EDUCATION

Erwartungswert und Varianz bei bekannten Wahrscheinlichkeiten

Unendliches Zufallsexperiment

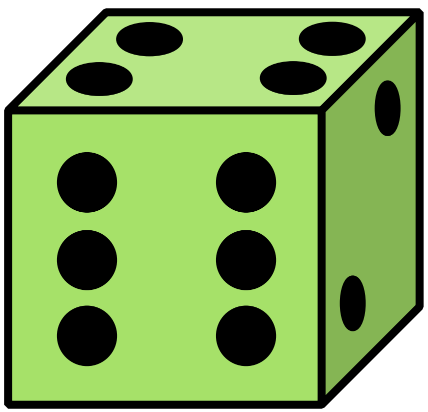
Wir wiederholen das Experiment unendlich oft (→ Gesetz der großen Zahlen).

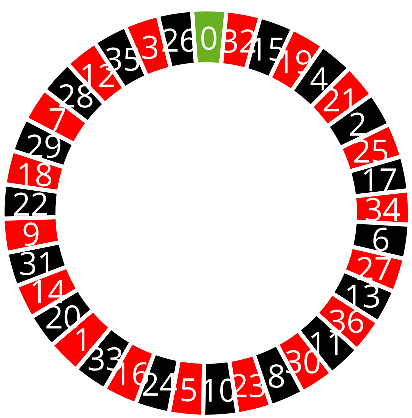
Welchen durchschnittlichen Wert erhalten wir, wenn wir unendlich oft, eine Münze werfen, würfeln oder Roulette spielen?

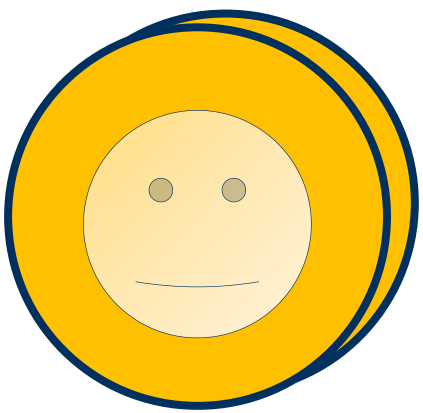
Würfel: Mittelwert =

Roulette: Mittelwert =

Definition für Münze notwendig: 0 = Kopf, 1 = Zahl. Mittelwert =







Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Erwartungswert

Allgemeine Formel für EX (Erwartungswert), X = Zahl

$\mathbf{EX} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{x_k} * \mathbf{p_k}$ (p = Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne X)

Für den Würfel sieht die Formel für den Erwartungswert so aus:

$$EX = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6}$$

$$EX = 3{,}5$$

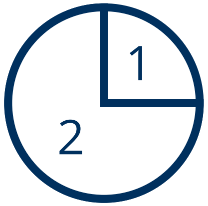
Welche Zahl kann man beim Roulette erwarten?

$$EX = 0 * \frac{1}{37} + 1 * \frac{1}{37} + 2 * \frac{1}{37} + 3 * \frac{1}{37} + 4 * \frac{1}{37} \ldots 36 * \frac{1}{37}$$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Aufgabe Erwartungswert

A. Wir haben ein Glücksrad mit ¼ der Fläche entspricht dem 1 und ¾ der Fläche dem Wert 2. Wie hoch ist der Erwartungswert für das Glücksrad?



B. Man würfelt 120 mal und wie groß ist der Erwartungswert für die 6? Münze

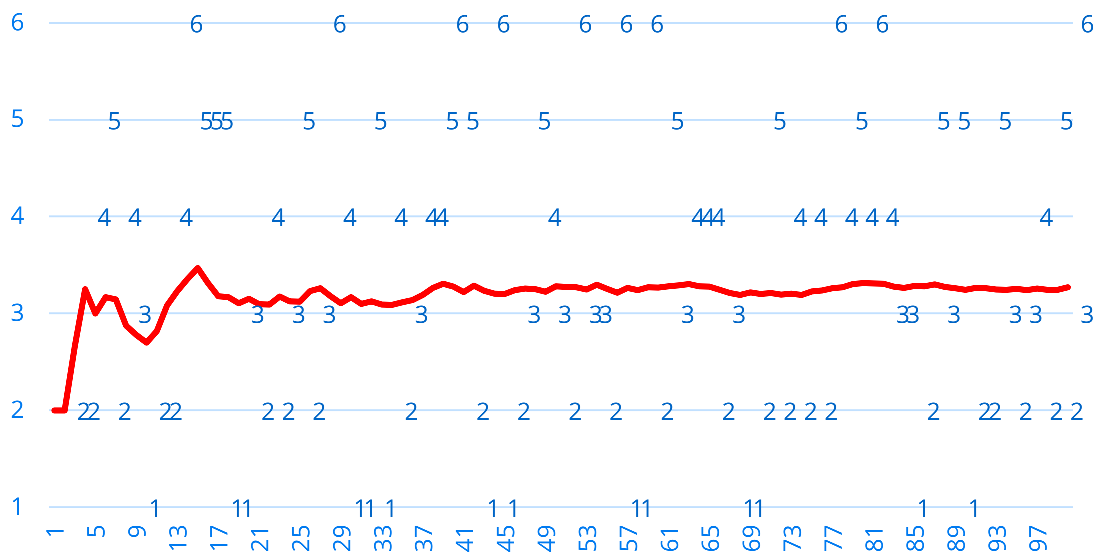
C. 700 werfen eine Münze werfen. Wie oft wird man Kopf werfen?

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Erwartungswert und Zentrale Grenzwertsatz

Der Erwartungswert gibt an, welcher Wert zu erwarten ist, wenn das „Experiment“ unendlich oft wiederholt wird.

Die Grafik zeigt die Ergebnisse eines Würfelexperiments. Auf der X-Achse sind die 100 Ergebnisse der Reihe nach dargestellt. Auf der Y-Achse ist die Höhe der Augenzahl dargestellt. Die rote Linie zeigt den Durchschnitt, jeweils vom ersten Wurf an. Am Ende nähert sich dieser Durchschnitt dem Erwartungswert.

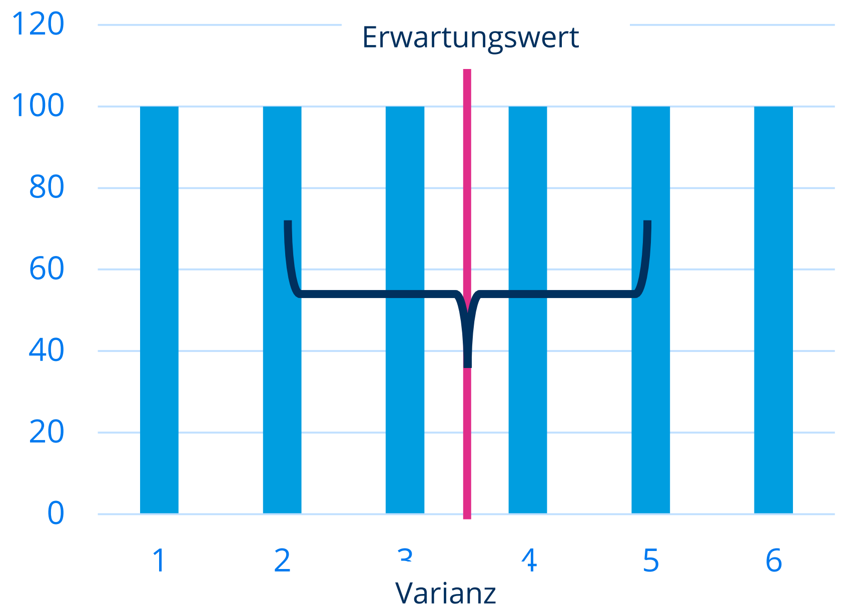


Führen Sie dieses Experiment selbst online durch: https://seeing-theory.brown.edu/basic-probability/index.html Scrollen Sie runter zu „**Expectation**“ und klicken Sie links „Roll 100 times. Wie viele Male müssen Sie auf den Button drücken, bis der Mittelwert sehr nah am Erwartungswert ist?

Varianz bei bekannten Wahrscheinlichkeiten

Erinnerung: Die Varianz zeigt an, wie sehr der Erwartungswert streut.

$$Var(X) = \sum_k (x_k - EX)^2 p_k$$



Aufgabe: Errechnen Sie die Varianz beim Würfel.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Aufgabe zur Varianz und Erwartungswert mit *verschiedenen* bekannten Wahrscheinlichkeiten

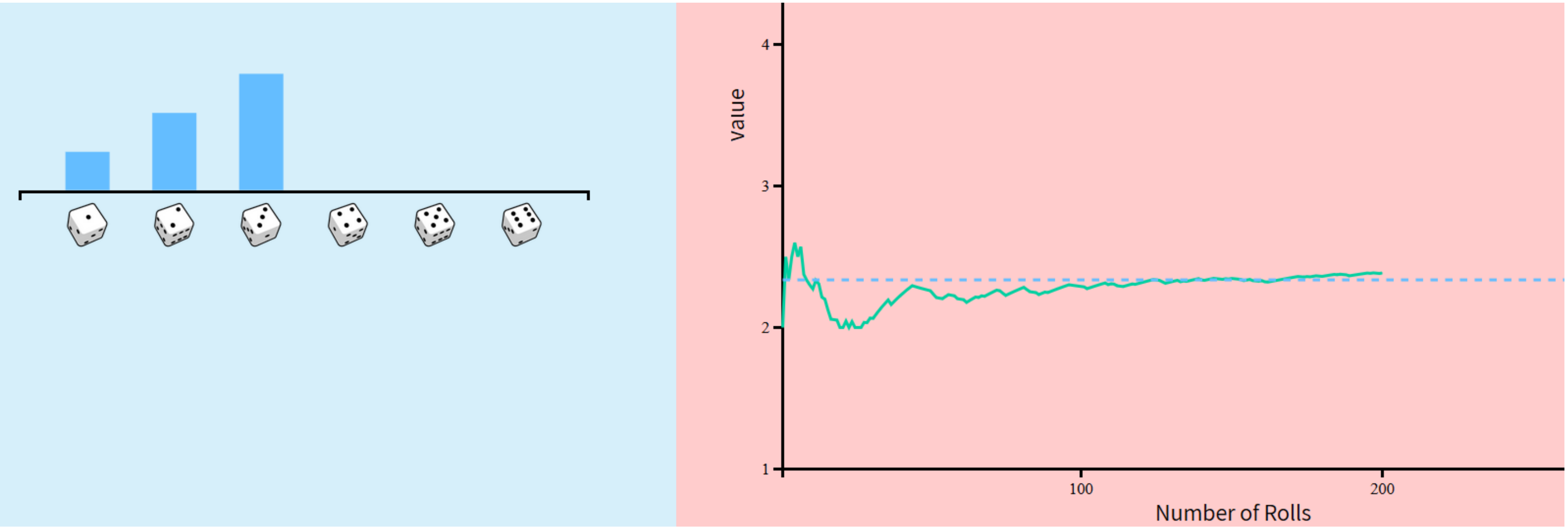
Ein Eisladen verkauft täglich 9 Eiswaffeln der Größe 1, 6 mal der Größe 2 und 3 Mal der Größe 3.

Wie lautet der Erwartungswert für die Größe vom Eis?

Wie lautet die Varianz?

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Veranschaulichung des Erwartungswert bei verschieden Wahrscheinlichkeiten



Gehen Sie auf folgende Seite: https://seeing-theory.brown.edu/basic-probability/index.html

Scrollen Sie bis hin zu „Expactations“

Dann verändern Sie bei den Würfeln die Wahrscheinlichkeiten. 4, 5 und 6 auf 0. Bei 1 auf 0,17, bei 2 auf 0,33 und bei 3 auf 0,5. (Wenn Sie ein Balken verändern, verändern sich die anderen automatisch, so dass Sie mehrfach die Veränderungen wiederholen müssen.)

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Abgrenzung des Erwartungswert und Varianz bei bekannten Wahrscheinlichkeiten zu Wahrscheinlichkeiten bei Stichproben

Erwartungswert von einer Stichprobe entspricht dem Mittelwert.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Um Varianz zu schätzen verwendet man Streuung

$$s_{xx}\frac{1}{n.1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})$$

$$s_x = \sqrt{s_{xx}}$$

Der Unterschied zwischen Erwartungswert und Varianz bei bekannten Wahrscheinlichkeiten: Bei bekannten wird der Wert multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für einen Wert. Bei Stichproben geht man davon aus, dass alle gefundene Werte die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Weshalb es reicht, durch n zu teilen.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Erwartungswert und Varianz bei anderen Verteilungen

Wir haben hier den Erwartungswert und die Varianz bei Gleichverteilung behandelt.

Für andere Verteilungsformen gibt es andere Formeln:

https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_univariater_Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Kombinatorik

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die **Kombinatorik** beantwortet die Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es um ***etwas zu kombinieren*?**

Wichtige Definition:
n = Anzahl der (theoretisch vorhandenen) **Elemente** (Zahlen, Farben, Buchstaben …)
k = Anzahl der „**Plätze**“

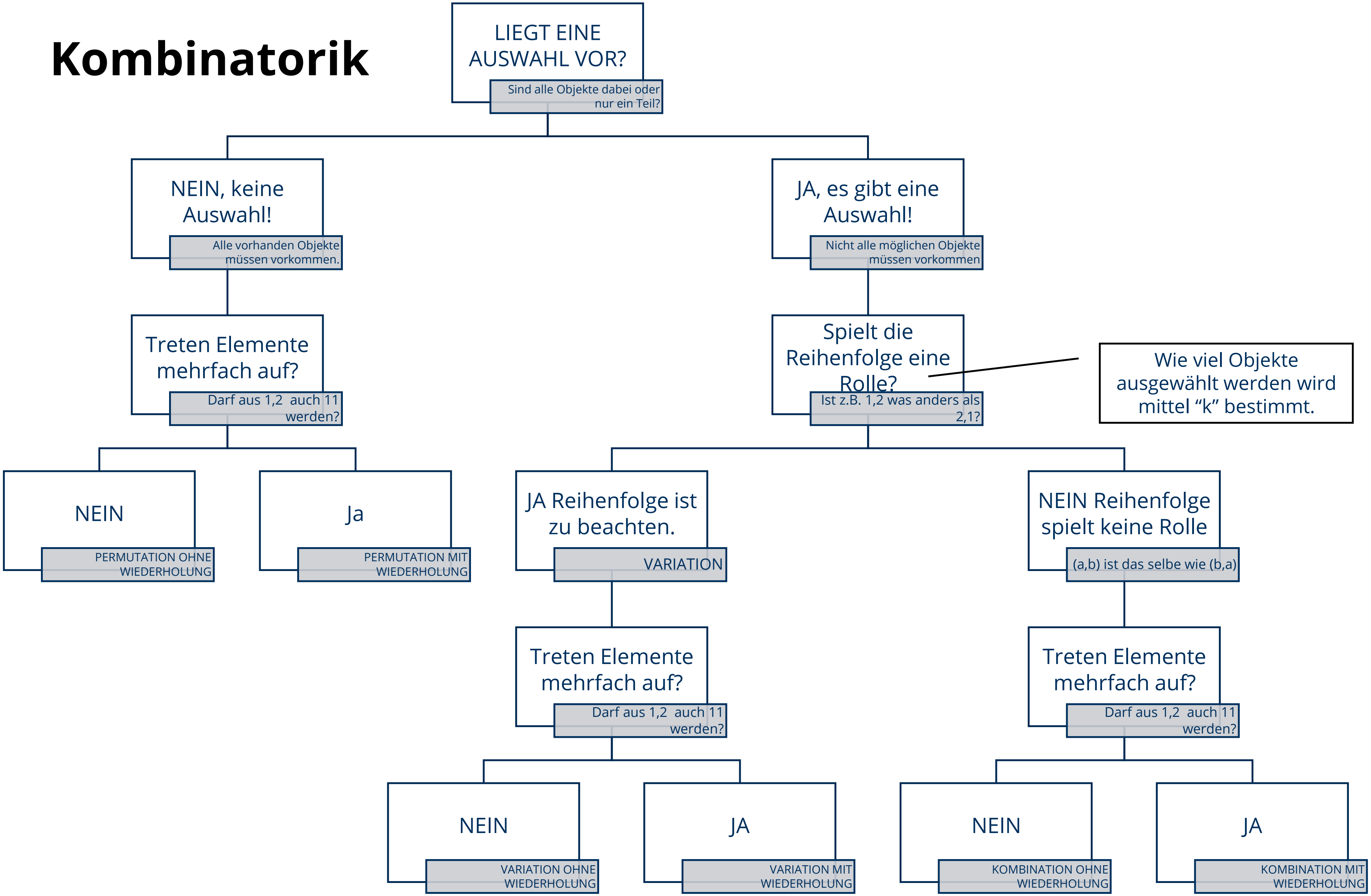
Die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** kommt im Anschluss ins Spiel:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes ***Ereignis***?

Wichtige Definition:
Ereignis = z.B. eine 6 beim Würfeln
Ω = Menge aller Ereignisse, beim Würfel = {1,2,3,4,5,6}

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Kombinatorik



Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

PERMUTATION OHNE WIEDERHOLUNG

Formel: $n!$

lies „n Fakultät“

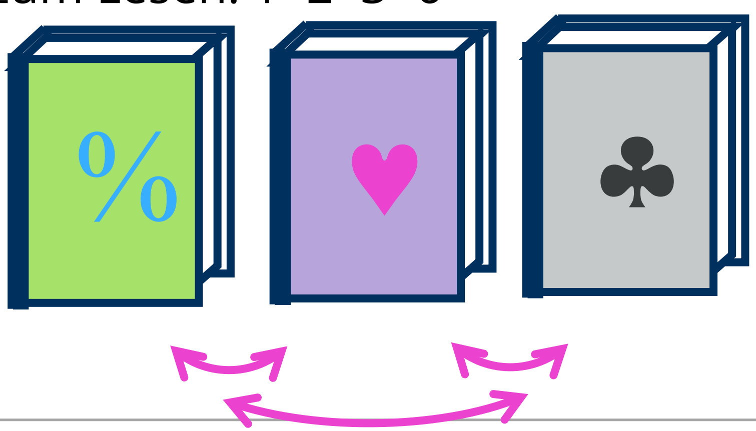
n!												
0!	=	1									=	1
1!	=	1									=	1
2!	=	1	*	2							=	2
3!	=	1	*	2	*	3					=	6
4!	=	1	*	2	*	3	*	4			=	24
5!	=	1	*	2	*	3	*	4	*	5	=	120

.

.

.

Anwendung: Von 3 Büchern die Anzahl der möglichen Reihenfolgen zum Lesen: 1*2*3=6



	1	2
1	X	12
2	21	X

Wenn es nur zwei Bücher gibt, dann gibt es 2 Möglichkeiten. (Bei drei Büchern ist die Darstellung komplexer.)

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

PERMUTATION MIT WIEDERHOLUNG

KANNE

NEKAN

ENKAN

Formel: $\frac{n!}{n_1!+n_2!+n_3!+\ \dots\ n_k}$

(Bedingung: $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots n_k$)

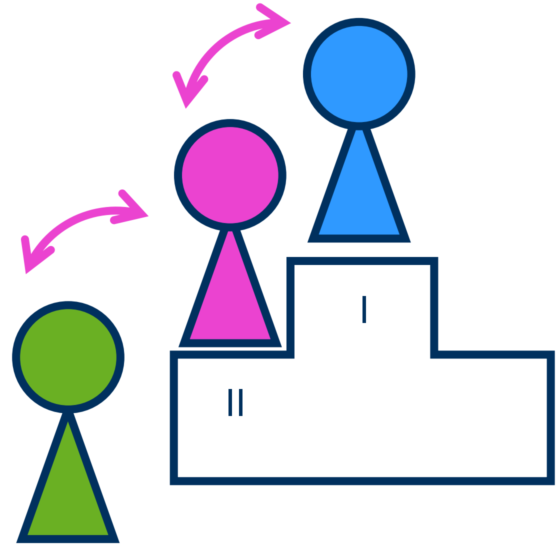
(Multinominalkoeffizient)

Erklärung: Jedes Element kann 1 mal oder mehrfach auftreten (oft auch als k bezeichnet und alle zusammen als n)

Anwendung: Wort KANNE wie viel Möglichkeiten gibt es, diese Buchstaben anzuordnen.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

VARIATION OHNE WIEDERHOLUNG



Formel: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Anwendungen: Von 3 Personen im Wettkampf, die ersten 2 Plätze

$$\frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 * 2 * 1}{1} = 6$$

		Zweiter Platz		
		A	**B**	**C**
Erster Platz	**A**	XX	AB	AC
	B	BA	XX	BC
	C	CA	CB	XX

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

VARIATION MIT WIEDERHOLUNG

Formel: n^k

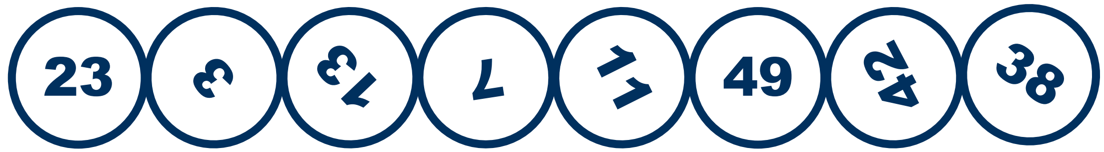
Anwendung: Alle Möglichkeiten eines Zahlenschloss

Wenn ein Zahlenschloss nur 2 Ziffern (Plätze) hat, kann man sich alle möglichen Kombinationen so vorstellen wie in der Tabelle abgebildet.

		Zweite Ziffer									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Erste Ziffer	**0**	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
	1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
	5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
	6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
	7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
	8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
	9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

KOMBINATION OHNE WIEDERHOLUNG



Formel: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!*k!}$

(*lies „n über k“*; Binominalkoeffizient)

Anwendung: Lotto Spiel 6 aus 49 (6 über 49)

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!*6!} = 13983816$$

In der Tabelle ist dargestellt, wie viel Möglichkeiten es gibt, aus 6 Zahlen 2 zu ziehen.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!*2!} = \frac{720}{24\ *2} = 15$$

		Zweite Ziehung					
		1	2	3	4	5	6
Erste Ziehung	1	X	12	13	14	15	16
	2	X	X	23	24	25	26
	3	X	X	X	34	35	36
	4	X	X	X	X	45	46
	5	X	X	X	X	X	56
	6	X	X	X	X	X	X

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

KOMBINATION OHNE WIEDERHOLUNG: Exkurs Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{k}$ kann auch in Form des Pascalschen Dreieck dargestellt werden

n entspricht der Zeile und k der Spalte (von links)

Berechnung des Pascalschen Dreiecks: Jede Zahl ist die Summe aus den zwei Zahlen links und rechts über ihr.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

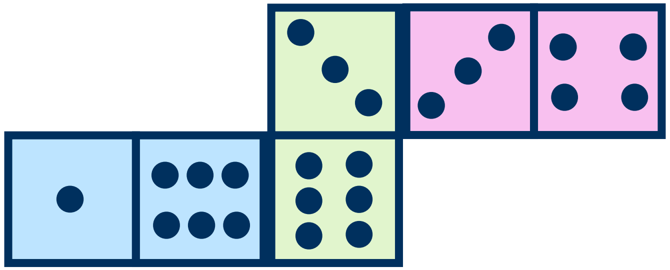
$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

KOMBINATION MIT WIEDERHOLUNG

Formel: $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!}$

(sprich „*(n+k-1) über k*")



Anwendung: Die Anzahl möglicher Dominosteine Dominosteine (= 28 Möglichkeiten bei 7 Zahlen (0 ist auch eine Zahl bei Domino))

	0	1	2	3	4	5	6
0	00	01	02	03	04	05	06
1	X	11	12	13	14	15	16
2	X	X	22	23	24	25	26
3	X	X	X	33	34	35	36
4	X	X	X	X	44	45	46
5	X	X	X	X	X	55	56
6	X	X	X	X	X	X	66

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Kombinatorik: Überblick

Name	Menge der Elemente = {A,B,C}, Anzahl gewählter Elemente: k =2 (erst ab Variation)	Formel	Alle Elemente dabei?	Reihenfolge beachten?	Treten Element mehrfach auf?
Permutation ohne Wiederholung	[A,B,C] [A,C,B] [B,A,C] [B,C,A] [C,A,B] [C,B,A]	$n!$	Ja	Ja	Nein
Permutation mit Wiederholung	A,A,B: [A,A,B] [A,B,A] [B,A,A]	$\frac{n!}{n_1! + n_2! + \cdots}$	Ja	Ja	Ja
Variation ohne Wiederholung		$\frac{n!}{(n-k)!}$			
Variation mit Wiederholung		n^k			
Kombination ohne Wiederholung		$\binom{n}{k}$			
Kombination mit Wiederholung		$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! * k!}$			

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Excelfunktionen für Kombinatorik

$n!$ =FAKULTÄT(ZAHL)

$\frac{n!}{(n-k)!}$ = VARIATIONEN(n;k)

$\binom{n}{k}$ = KOMBINATIONEN(n;k)

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übung: Kombinatorik

Wie viel „Ziffern“ mit allen 5 Zahlen können Sie aus den folgenden 5 Zahlen bilden?

2 1 2 1 2

Lösung:

Wie viel „Worte“ kann man bilden?

A B C D E

(Buchstaben streichen, wenn er bereits verwendet wurde. Wörter müssen keinen Sinn ergeben und Buchstaben kommen nicht doppelt vor.)

Lösung:

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

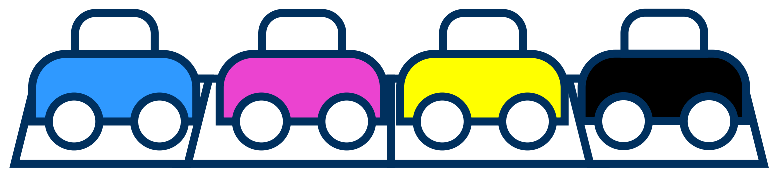
Übung: Kombinatorik

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übung: Kombinatorik

Lösung:

Eine Möglichkeit die Autos anzuordnen sieht so aus. Wie viele gibt es noch?

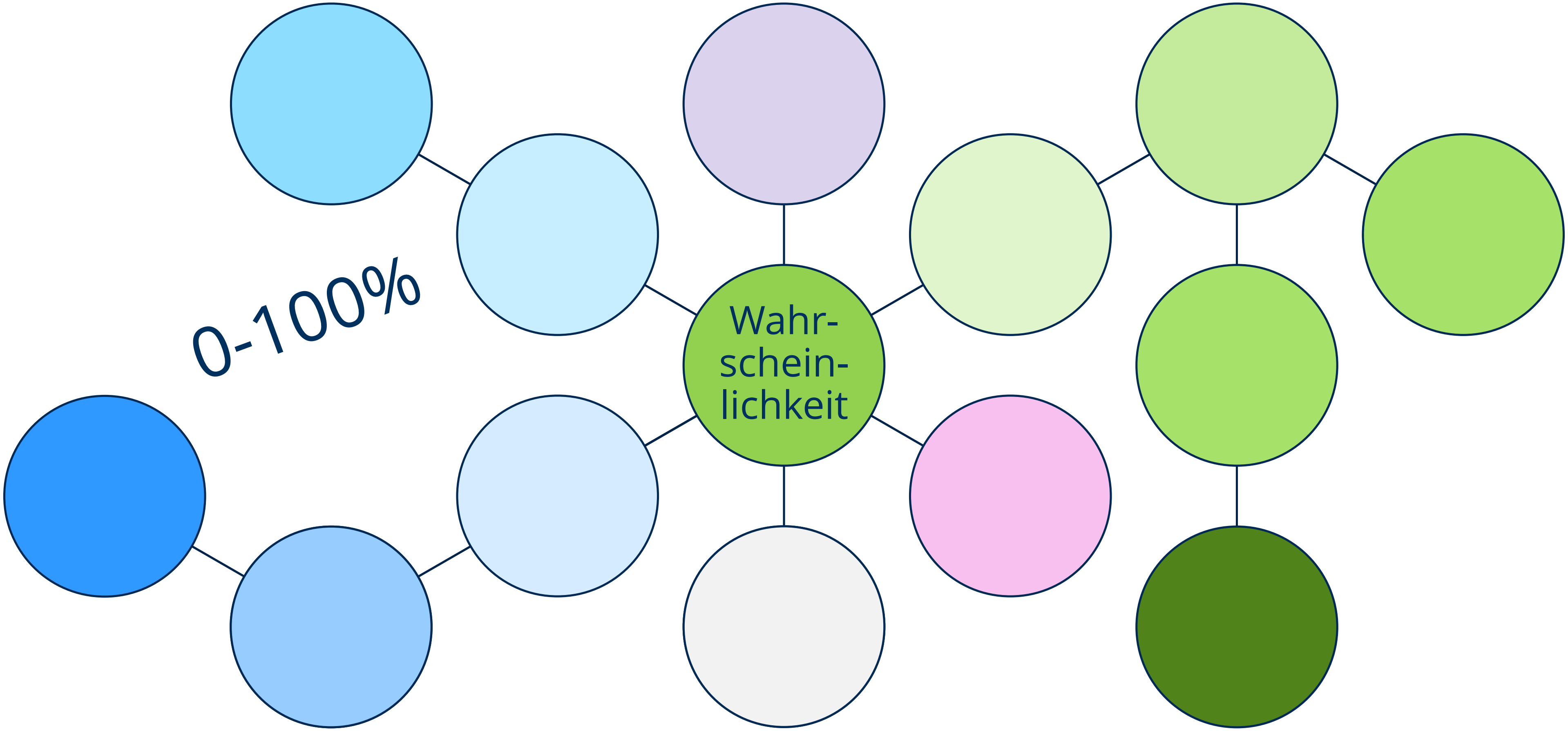


Lösung:

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

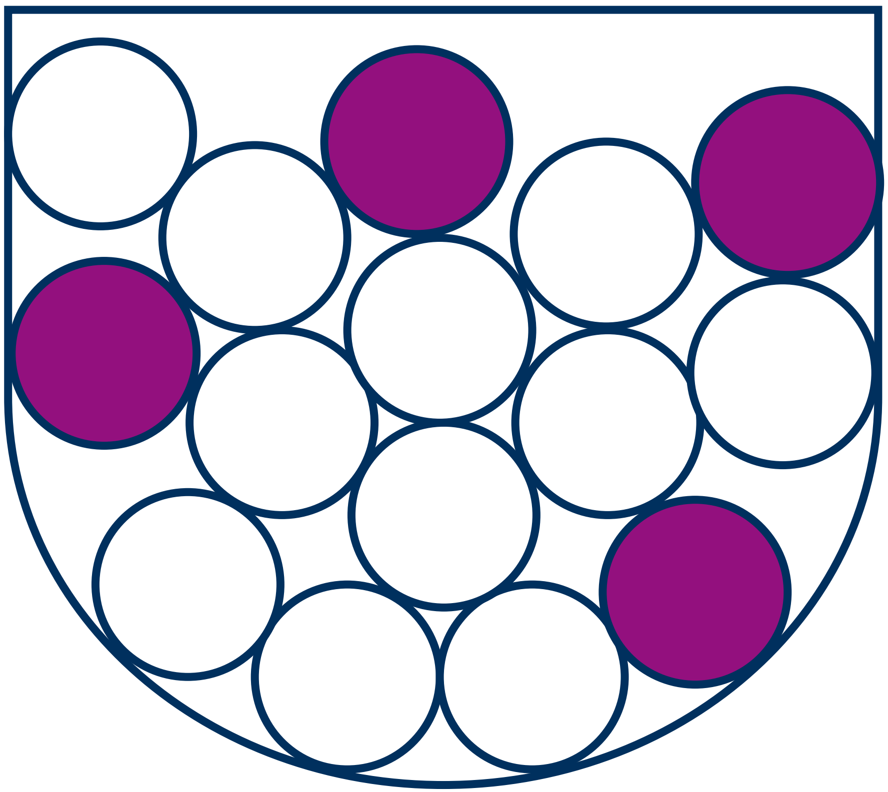
Wahrscheinlichkeit Grundlagen

Wahrscheinlichkeit



Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Begriffserklärung



Urne mit n Elementen

Mit/ohne Zurücklegen (entspricht der Wiederholung bei Kombinatorik)

Rückgriff auf Variation (Reihenfolge wichtig) und Kombination (Reihenfolge unwichtig)

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Definitionen: Mengen, Ereignisse

		Deutschnote		
		X	Y	Z
Lateinnote	I	**a**	**b**	**c**
	II	**d**	**e**	**f**
	III	**g**	**h**	**i**

Alle Elemente: Ω

Ereignisse: $\mathrm{X} = \mathrm{a} \cup d \cup g$ → Zufallsvektor: $X = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$

Gegenereignis: $\bar{I} = II \cup III$

Summierte Ereignisse: $Y \cup \mathrm{II} = \mathrm{b} \cup e \cup h \cup d \cup f$

Gemeinsames Ereignis: $III \cap Z = i$ Element was zu beiden gehört

a$\in$ M (a ist Element der Menge Ω ($\notin$ → ist nicht Element der Menge))

I $\subseteq$ M (ein Ereignis)

Leere Menge: $\mathrm{X} \cap Y = \emptyset$

P(M) = 1 Wahrscheinlichkeit alle Elemente

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

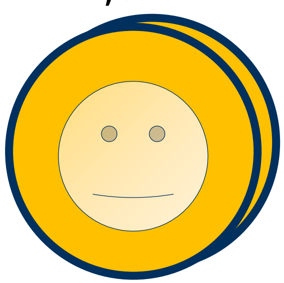
Der Zufall, Zufallsexperiment, Ereignis

Ein Zufallsexperiment: bei Wiederholung des Experiments erhält man immer die ähnliche Ergebnisse. Man kennt die möglichen Ergebnisse, aber genaue Vorhersage ist unmöglich.

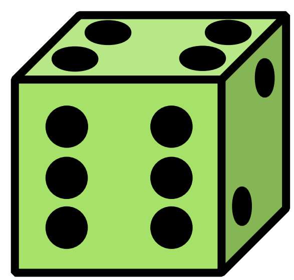
Wie wahrscheinlich ist a.) Kopf bei der Münze, b.) eine 6 beim Würfel und c.) eine 0 beim Roulette?

Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines konkreten ***Ereignisses*** *(Ergebnis)*:

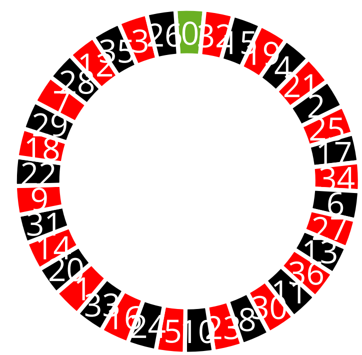
0,5 / ½



1/6



1/37



Wie lautet die Menge aller Ereignisse:

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übung Ereignisse und Ergebnisse

Sie werfen eine Münze zwei Mal.

a. Wie viel verschiedene Ergebnisse sind möglich?
b. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses?
c. Wie Wahrscheinlich ist es, dass Sie bei zwei Würfen hintereinander genau einen Kopf und eine Zahl dabei haben?

Sie haben zufällig zwei Mal Kopf hintereinander geworfen.

1. Wie Wahrscheinlich ist es, dass Sie beim nächsten Wurf noch ein Kopf werfen?
2. Sie werfen nun 10 weitere Male, immer erscheint Kopf? Ist die Münze gezinkt?

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Quiz über Glücksspiele

		Ja	Nein
1	Im Lotto ist die Zahlenfolge 1,2,3,4,5,6 genauso wahrscheinlicher wie Reihenfolge 6,12,23,34,35,47		
2	Man kann vorhersagen welche Kugel beim Roulett als nächstes kommt.		
3	Wer 10 Jahre erfolglos Lotto spielt wird demnächst bestimmt Glück haben.		
4	Die Wahrscheinlichkeit, ob ich eine Klausur bestehe oder nicht, ob ich beim Fußball ein Tor schieße oder nicht oder ob ich einen Job bekomme oder nicht beträgt nie genau 50:50.		
5	Seltene Ereignisse – wie besonders viel Nüsse in einer Tüte mit Nüssen – treten nur auf, wenn irgendwas besonderes geschehen ist. Normal ist das nicht.		
6	Wenn ich beim Würfeln drei Sechsen hintereinander würfle, wird der nächste Wurf sicher auch eine Sechs.		

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Von Kombinatorik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung
Laplacescher Wahrscheinlichkeitsregel

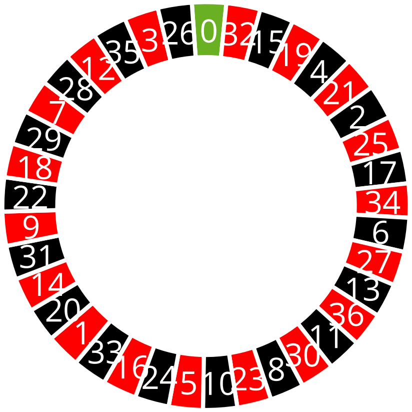
$$Wahrscheinlichkeit = \frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Fälle} = \boldsymbol{P}$$

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsregel
Wenn alle Einzelergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeit (P) beim Roulett

a. P für Zahl 0
b. P für rote Zahlen

Lösung



Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Gegenwahrscheinlichkeit Ā: I

Ausgangproblem: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, keine Sechs zu würfeln?

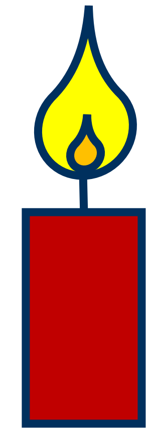
A = Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln = 1/6

$\bar{A} =$ $\boxed{}$

Venn-Diagramm

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Gegenwahrscheinlichkeit Ā: II

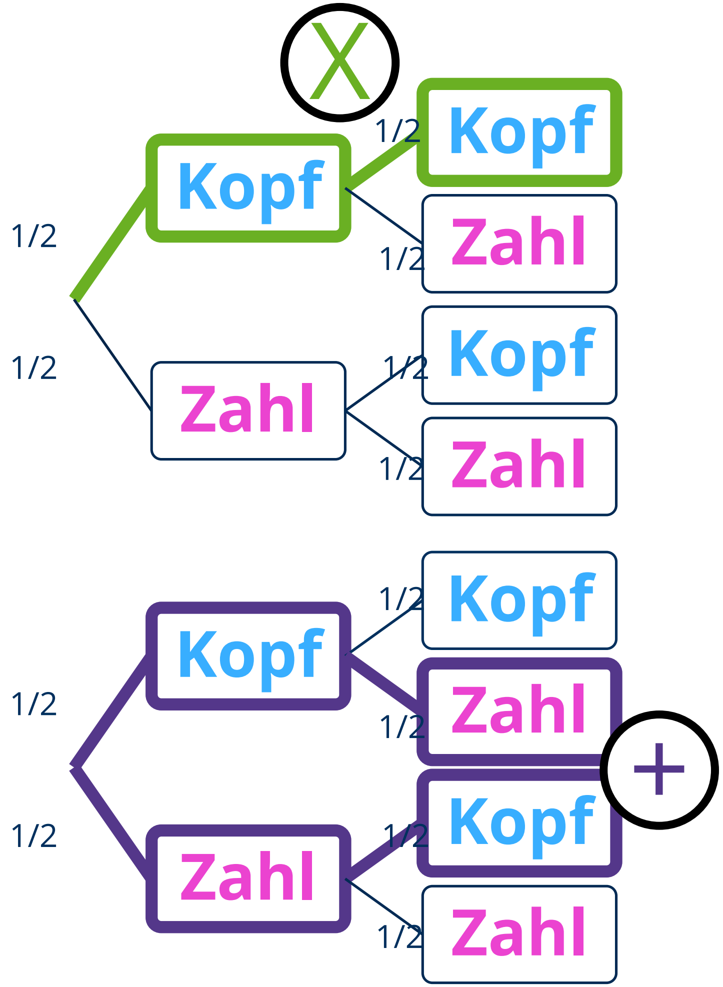


Ausgangsproblem: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig ausgewählte Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Umgekehrte Formulierung des Ausgangsproblems: Wahrscheinlichkeit das eine zwei Personen *nicht* am gleichen Tag Geburtstag haben:

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Baumdiagramm mit 1. und 2. Pfadregel



Pfaddiagramme für das Werfen einer Münze

1. Pfadregel / Produktregel:

Wahrscheinlichkeit **für ein Pfad**: errechnet sich durch die Multiplikation anhand eines Pfads:

*Zwei Mal Kopf hintereinander = ½ * ½ = 1/4*

2. Pfadregel / Summenregel:

Wahrscheinlichkeit **für zwei Pfade** ist die Summe beider Pfade:

Zwei Mal werfen. Dabei sollen einmal Kopf und einmal Zahl geworfen werden. Das sind zwei Pfade: I: 1: K 2: Z; II: 1. Z, 2: K

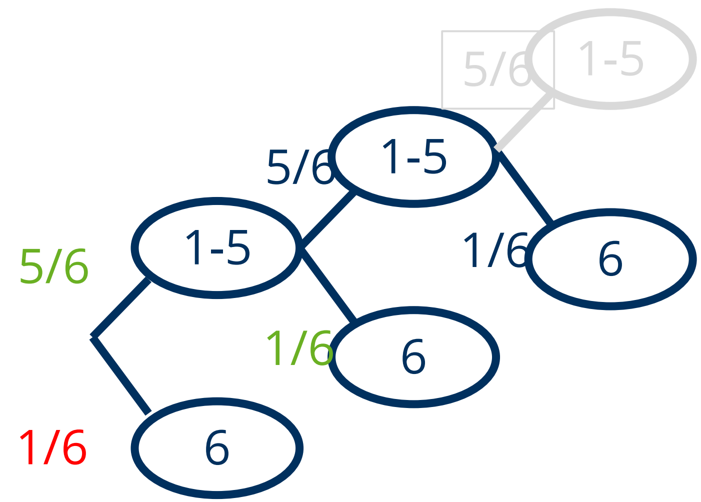
*= ½ * ½ + ½ * ½ = ½*

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Addition von P bei abhängigen / nicht ausschließenden / unvereinbarten Ereignissen

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Würfen mindestens einmal die Sechs dabei zu haben?

		1. Wurf					
2. Wurf		1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

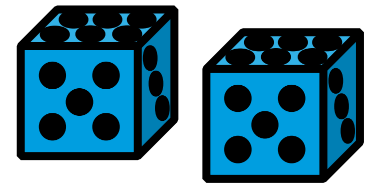


!! Das Grüne ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Würfen mindestens einmal die Sechs zu haben. Wobei 1/6 + 1/6 NICHT gerechnet werden darf, da sonst das dunkel grüne Feld doppelt gerechnet werden.

$$P = 1/6 + 5/6*1/6 + 5/6*5/6*1/6$$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übungen Pfadregeln



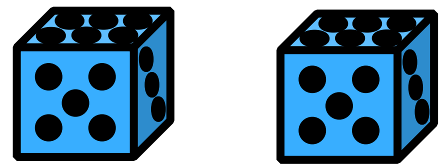
Für folgende Aufgaben zeichnen Sie das Baumdiagram auf.

1. Wahrscheinlichkeit beim Würfeln für zwei Sechsen hintereinander?

2. Wahrscheinlichkeit bei zweimal Würfeln für eine Sechs und eine Eins?

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Additionstheorem: mehreren Einzelwahrscheinlichkeiten



Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zweimal Würfeln ein Ergebnis von 8, 9 oder 10 zu erreichen?

$P(8 \leq X \geq 10) =$

$P(X=8) + P(X=9) + (P(X=10)$

$P(8 \leq X \geq 10) =$

$5/36 + 4/36 + 3/36 = 1/3$

Summe von beiden Würfeln		**Augen des ersten Wurfs**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Augen des zweiten Wurfs	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Wahrscheinlichkeitsrechung: Übung

Alltagsprobleme zu den verschieden Typen zuordnen

- 3 Würfel wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle die 6 zeigen?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus einem Skatblatt mit 32 Karten entweder ein As oder eine rote Karte gezogen wird?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen 2 am gleichen Tag Geburtstag haben?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6 mal würfeln alle Zahlen von 1-6 dabei sind?

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Exkurs Kreuztabellen

Kreuztabellen Grundbegriffe

	Komödie	**Drama**	**Zeilensumme:**
Filme 2018	5	6	**11**
Filme 2019	7	8	**15**
Filme 2020	9	10	**19**
Spaltensumme:	**21**	**24**	**Gesamthäufigkeit 45**

Zwei nominale (kategoriale) Variablen.
Jede Variable hat eine überschaubare Menge an Kategorien.
Ziel: Zusammenhänge zwischen beiden Variablen herausfinden.

Randhäufigkeit

Randhäufigkeit

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Exkurs: Kreuztabellen für Chi-Quadrat erstellen mit Pivottabellen I

Darstellung von zwei oder mehr Variablen in einer Tabelle (z.B. als Grundlage für Chi-Quadrat-Test)

Nr.	Beruf	Ernährung
1	Fleischer	Fleisch
2	Fleischer	Vegetarisch
3	Gemüsehändler	Vegetarisch
	eischer	Fleisch
	emüsehändl	Vegetarisch
	eischer	Fleisch
	eischer	Vegetarisch
	emüsehändl	Vegetarisch
9	Gemüsehändler	Fleisch
1	Gemüsehändl	Vegetarisch

	Gemüsehändler	Fleischer	Σ
Fleischesser	1	3	4
Vegetarisch	4	2	6
Σ	5	5	10

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

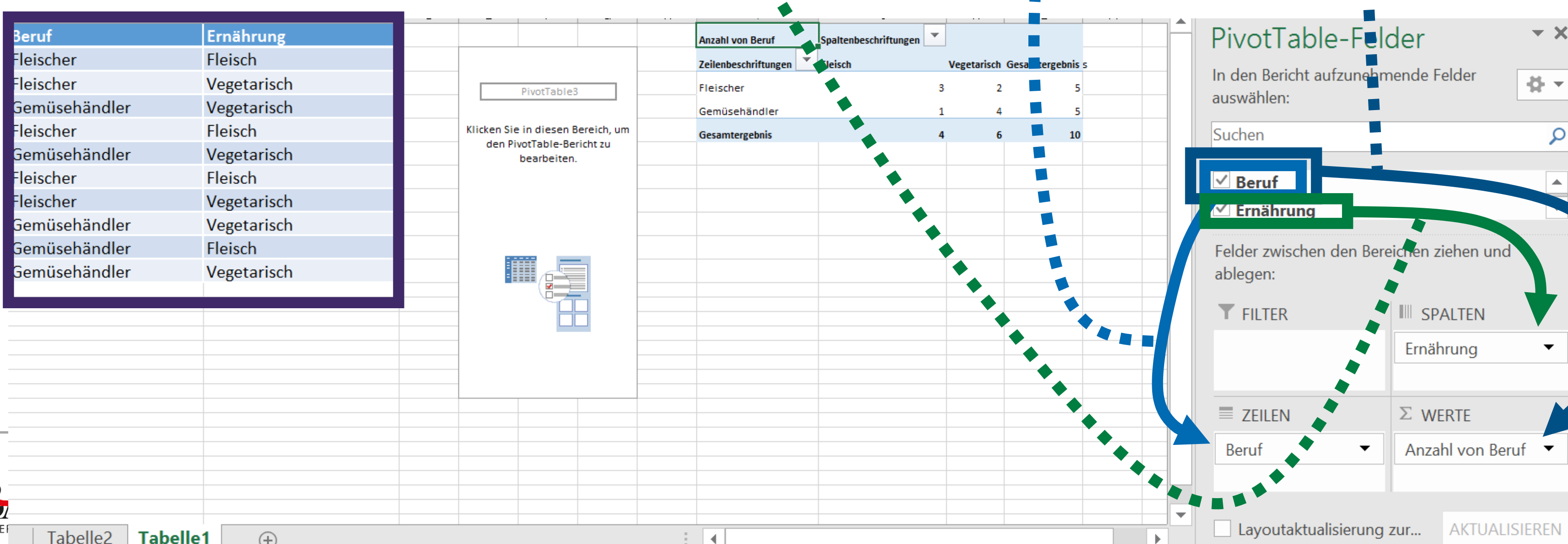
Exkurs: Kreuztabellen für Chi-Quadrat erstellen mit Pivottabellen II

Ursprungstabelle mit Überschrift markieren

Pivottabelle einfügen (→ Einfügen → Tabellen → PivotTables)

Unter PivotTable-Felder eine Variable in „ZEILEN“ und eine Variable in „SPALTEN“ ziehen!

Im Bereich Wert noch mal(!) eine beliebige Variable ziehen!

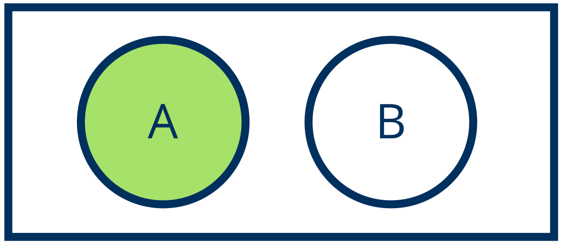


Creative Commons: Attribution NonCommercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Grundlagen Mengentheorie

Gegenteil der bedingten Wahrscheinlichkeit ist die ***Unabhängigkeit:*** $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$



Zur Wiederholung von Mengentheorie und deren Symbole verwenden Sie diese interaktive Grafik: https://seeing-theory.brown.edu/compound-probability/index.html
Lassen Sie sich den Unterschied zwischen $A \cap B$ zu $A \cup B$ anschauen.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Einfache Wahrscheinlichkeiten

		Deutschnote			
		X	Y	Z	
Lateinnote	I	1	2	3	6
	II	6	5	4	15
	III	7	8	9	24
		14	15	16	45

$\mathbf{P(M) = \frac{45}{45} = 1}$ (Wahrscheinlichkeit aller Elemente; Gesamthäufigkeit)

$\mathbf{P(Y) = \frac{15}{45}}$ (Einfache Wahrscheinlichkeit, Randwahrscheinlichkeit)

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

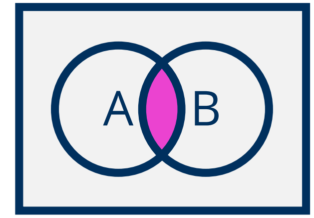
Gemeinsame und vereinigte Wahrscheinlichkeiten

		Deutsch-note			
		X	Y	Z	
Latein-note	I	1	2	3	6
	II	6	5	4	15
	III	7	8	9	24
		14	15	16	45

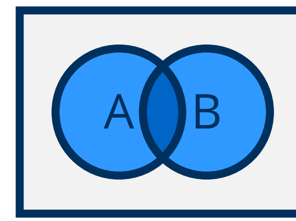
Gemeinsame Wahrscheinlichkeit = die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler in Latein die Note „II“ und in Deutsch die Note „Z“ hat:

$\boldsymbol{P(Y \cap II) = \frac{15}{45} * \frac{4}{15} = \frac{4}{45}}$

(gemeinsame Wahrscheinlichkeit)



$\boldsymbol{P(A \cap B)}$



$\boldsymbol{P(A \cup B)}$

Vereinigte Wahrscheinlichkeit: Wird danach gefragt wie hoch die Wahrscheinlichkeit für Ereignis A oder B ist spricht man von vereinigter Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$.

Z.B. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Schüler in Deutsch die Note „X“ oder in Latein die Note „I“ zu erhalten: $\boldsymbol{P(X \cup I) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{I}) - \mathrm{P}(X \cap I) = \frac{14}{45} + \frac{6}{45} - \frac{1}{45} = \frac{19}{45}}$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit

		Deutsch-note			
		X	Y	Z	
Latein-note	I	1	2	3	6
	II	6	5	4	15
	III	7	8	9	24
		14	15	16	45

Wir betrachten nur die Gruppe III und Fragen dann, wie Wahrscheinlich ist es, dass dann eine Note „Z“ auftreten kann.

$\boldsymbol{P(III|Z) = \frac{P(Z \cap III)}{P(III)} = \frac{9}{24}}$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit

		Deutsch-note			
		X	Y	Z	
Latein-note	I	1	2	3	6
	II	6	5	4	15
	III	7	8	9	24
		14	15	16	45

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler aus der Gruppe mit der Note X in Latein eine III erhält.

Welcher Anteil der Schüler mit Y hat eine andere Lateinnote als I und II.

Berechnen Sie P(III|Z) und P (Z|III).

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedinge Wahrscheinlichkeiten: Als Textaufgabe

		Deutsch-note			
		X	**Y**	**Z**	
Latein-note	I				
	II				
	III				

Eine Textaufgabe könnte lauten:
Von 45 Schülern haben 24 Schüler in Latein eine III.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übung Wahrscheinlichkeit

Filme	Komödie	Drama	Zeilensumme:
2018	5	6	
2019	7	8	
2020	9	10	
Spaltensumme:			

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit,

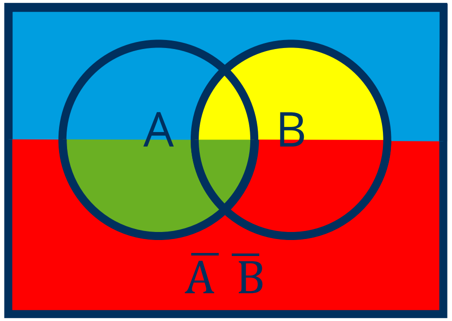
- dass ein Film nicht aus dem Jahr 2020 und ein Drama ist.

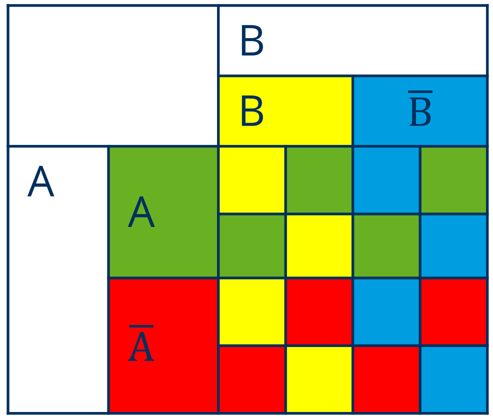
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit,

- dass ein Film aus dem Jahr 2019 und eine Komödie ist.
- dass ein Film aus dem Jahr 2019 oder eine Komödie ist.
- dass ein Film aus dem Jahr 2019 eine Komödie ist.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Satz von Bayes; allgemeine Formeln





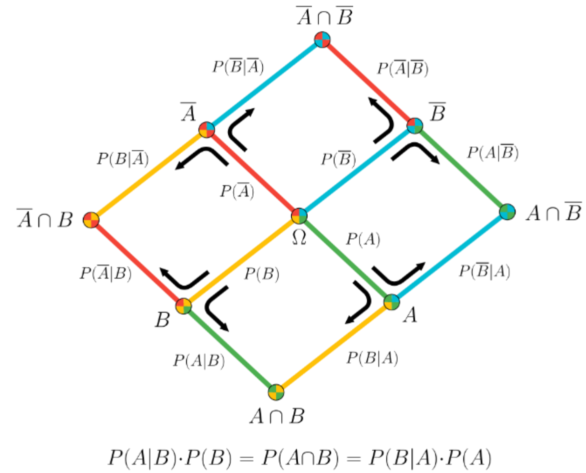


Illustration des Satzes von Bayes: Quelle Qniemiec - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bayes%27_Theorem_2D.png, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=44778639

Satz von Bayes:

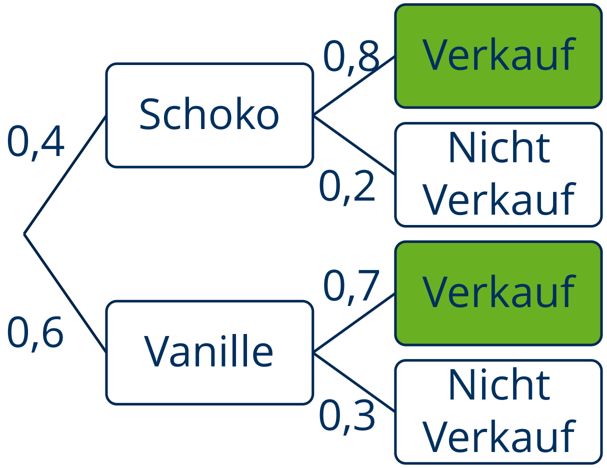
$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

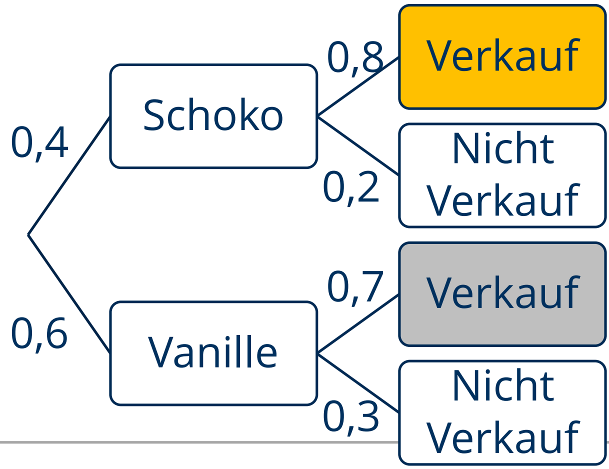
Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B ist auch eingetreten.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Vergleich Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit

Szenario: Eisladen, hat Anteil von 40 Schokoeis und Rest Vanilleeis.
Vom Schokoeis wir 80 % verkauft. Vom Vanilleeis 70 %.





Totale Wahrscheinlichkeit:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit insgesamt (total) für den verkaufte Eis?

1. + 2. Pfadregel:

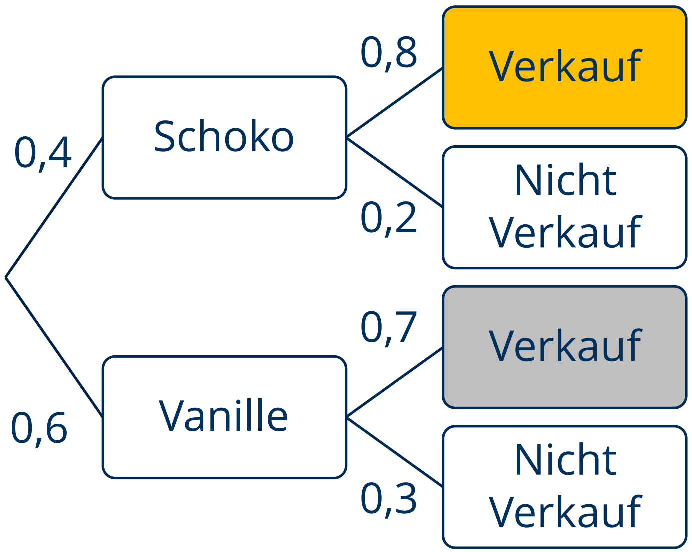
Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für ein verkauftes Eis, dass es Schokolade ist?

.... *(nächste Folie)*

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit weiter rechnen



$P(Schoko \cap Verkauf) =$

$P(Schoko \cap \overline{Verkauf}) =$

$P(Vanille \cap Verkauf) =$

$P(Vanille \cap \overline{Verkauf}) =$

4-Felder Tafel	**Schoko**	**Vanille**	**Zeilen %**
Verkauft			
Nicht verkauft			
Spalten %	**0,40**	**0,60**	**1**

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bayesianische Statistik

Können Menschen in Baysianische Statistik denken?

Es gibt verschiedene Wege Baysianische Statistik zu lernen:

- Vorgabe von verschiedenen Fällen. Die Lernenden geben Schätzungen ab. Dann erhalten sie die richtigen Ergebnisse.

- Lernen der Gesetz der großen Zahl.

Kann man das damit das Denken in Baysianischer Statistik erfolgreich lehren/lernen?

* Sedlmeier, Peter, Gigerenzer, Gerd Teaching (2001): Bayesian Reasoning in Less Than Two Hours. Journal of Experimental Psychology: General Vol. 130, No. 3. 380-400

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung aus Text Informationen ableiten

		Kreditrückzahlung	
		Zahlen nicht zurück	Zahlen zurück
		10	90
Unternehmens-größe	Hohes Risiko		
	Niedrig Risiko		

Sie arbeiten in einer Bank. Anhand der Daten der letzten 10 Jahre wissen Sie, dass 10 % der bisherigen Kreditnehmer ihren Kredit nicht zurückzahlen. Sie haben ein neues Rechenmodell, dass Kunden in Hoch- und Niedrig-Risikogruppen klassifiziert. Als Hochrisikokreditnehmer wurden von (= von den Nicht Zurückzahlenden klassifiziert und 20 % von den Rückzahlenden.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit das ein Kreditnehmer, der als hoch Risiko Kreditnehmer eingestuft wird, seinen Kredit nicht zurück zahlt? Wie gut eignet sich das Rechenmodell als Prognose Instrument?

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung Bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen

		Kreditrückzahlung			
		Zahlen nicht zurück	Zahlen zurück	Summe	Davon nicht zurück zahlen
		10	90		
Unternehmens-größe	Hohes Risiko				
	Niedrig Risiko				

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung
Veranschaulichung

Absolute Zahl: 100

Zahlen nicht 10

Zahlen 90

Hoch Risiko

Niedrig Risiko

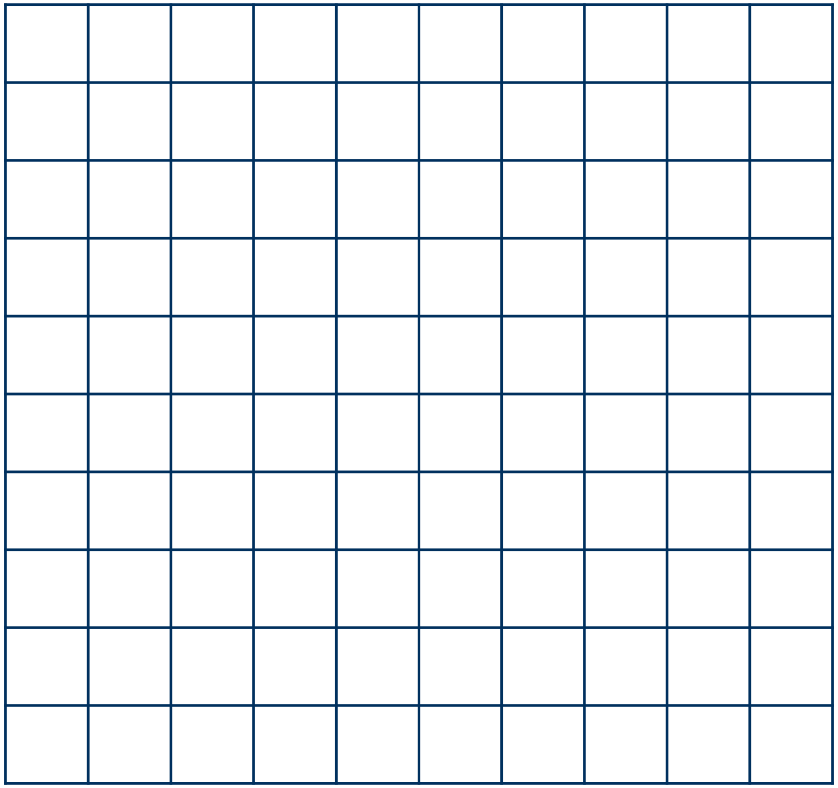
Hoch Risiko

Niedrig Risiko

BA BERUFSAKADEMIE SACHSEN
STAATLICHE STUDIENAKADEMIE
RIESA
UNIVERSITY OF COOPERATIVE EDUCATION

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung
Veranschaulichung



- Hochrisiko Kreditnehmer
- Hochrisiko Kreditnehmer, die nicht zurückzahlen
- Niedrigrisiko Kreditnehmer
- Niedrigrisiko Kreditnehmer, die nicht zurückzahlen

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Übung Krankheit

Angenommen, bei Ihnen wurde mit einem Test eine schwere Krankheit diagnostiziert. Nun wissen Sie, dass diese Krankheit selten ist. Sie tritt bei 1000 Menschen nur einmal auf. Außerdem wissen Sie, dass der Test nur zu 99 Prozent richtige Ergebnisse liefert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie krank sind?

		Wirklichkeit			
		Krank 1 Person	Gesund 999 Personen	Summe	Davon krank
Testergebnis	„Krank"	99 % als krank erkannt = Personen	1 % falsch als krank eingestuft = Personen		
	„Gesund"	1 % falsch als gesund eingestuft = Personen	99 % als gesund erkannt = Personen		

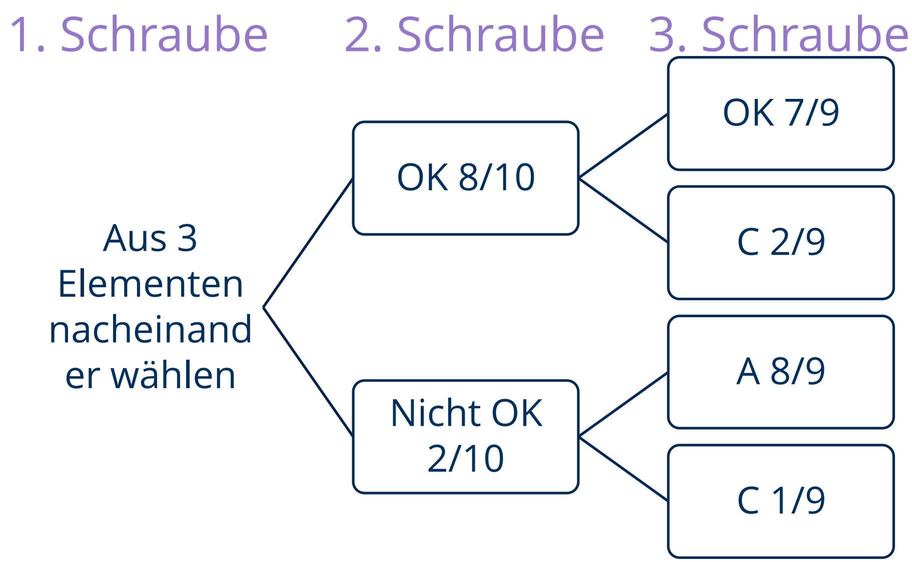
Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Diskrete Verteilung und Wahrscheinlichkeiten

Mehrere Ereignisse hintereinander mit Wiederholung/Zurücklegen

Beispiel: Von 10 Schrauben haben zwei einen Fehler.

Wenn man 2 Schrauben wählt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle ok sind?



Alle vier P zusammen = 1

Die Darstellung ist ungeeignet für komplexere Probleme.
Daher verwendet man die **Binominalverteilung** (wenn die Wahrscheinlichkeiten sich nicht in jedem Schritt ändern.)
oder die hypergeometrische Verteilung.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Formel von Bernouli / Binominalverteilung

Wenn die Wahrscheinlichkeiten sich über das Zufallsexperiment nicht ändern wird die Formel von Bernouli / Binominalverteilung verwendet:

n = Anzahl der Durchgänge. k = Häufigkeit des gewünschten Ereignis. p = Einzelwahrscheinlichkeit für gewünschtes Ereignis.

$$P(N = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$$

Binominalkoeffizient: bekannt aus Kombinatorik. Sagt: Wie viel gewünschte Pfade gibt es.

Wahrscheinlichkeit für k Mal hintereinander des Ereignisses.

Gegen-wahrschein-lichkeit (0-1) für gewünschtes Ergebnis.

Wahrscheinlichkeit für k Mal NICHT hintereinander des Ereignisses.

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Formel von Bernouli / Binominalverteilung

Anteil von 30 % defekte Produkte (p = 0,3)

Stichprobengröße: 20 Produkte zufällig auswählen

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 8 Produkte defekt sind?

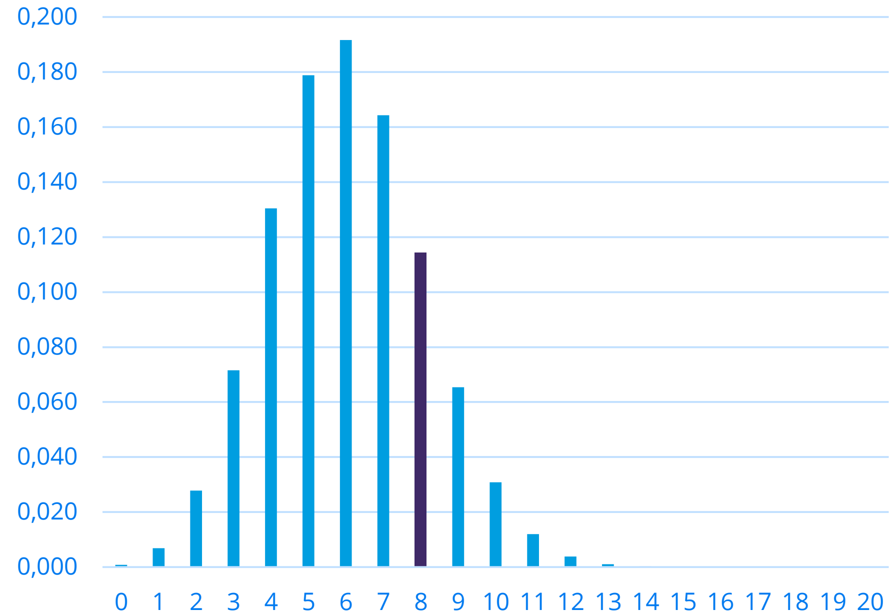
$$P(N = k) = \binom{n}{k} * p^{k} * (1 - p)^{n-k}$$

$$P(N = k) = \binom{20}{8} * 0{,}3^{8} * (1 - 0{,}3)^{20-8} = 0{,}11$$

Verallgemeinert

Wenn k = 0, 1, 2, ... 20

Das ist die Binominalverteilung (Y-Achse = Wahrscheinlichkeit, X-Achse Anzahl der Treffer)



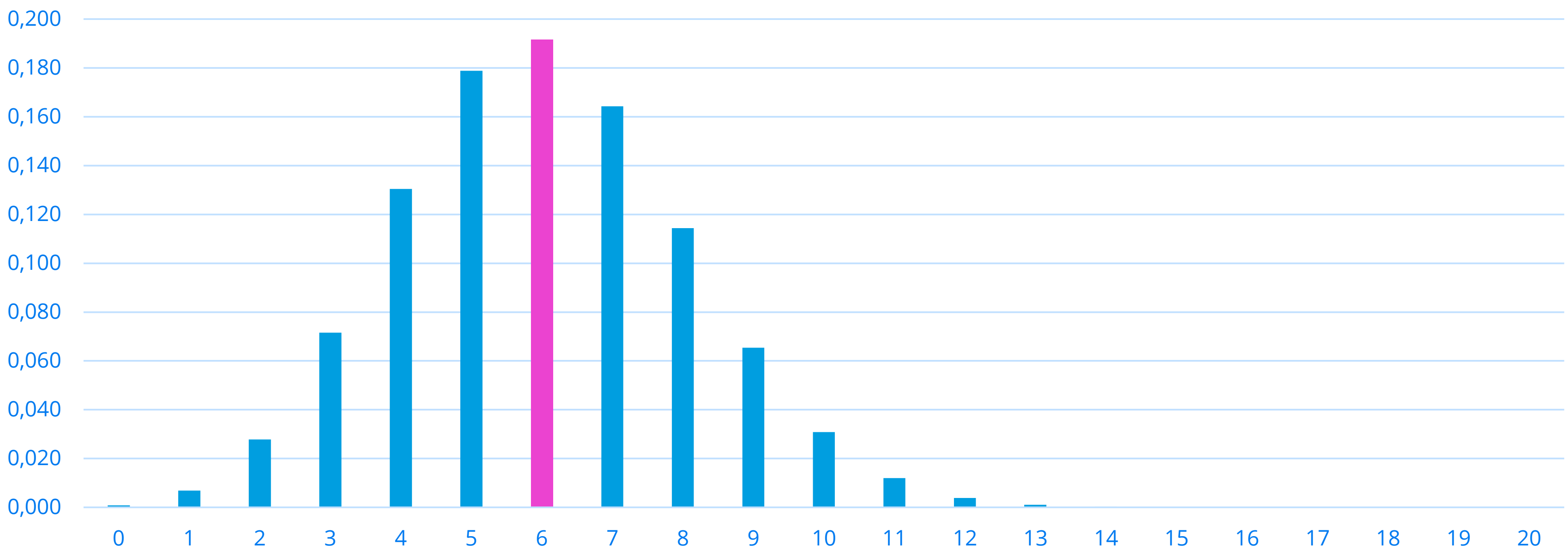
Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Binominalverteilung: Erwartungswert

Erwartungswert bei Binomialverteilung

$E = n * p$

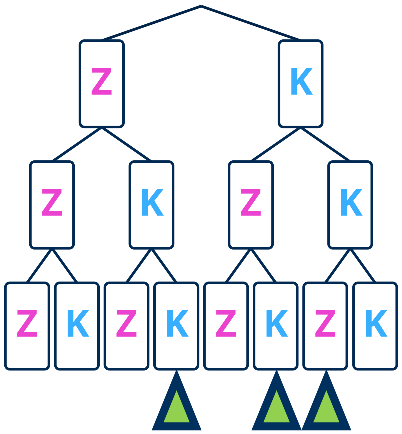
$E = 20 * 0{,}3 = 6$



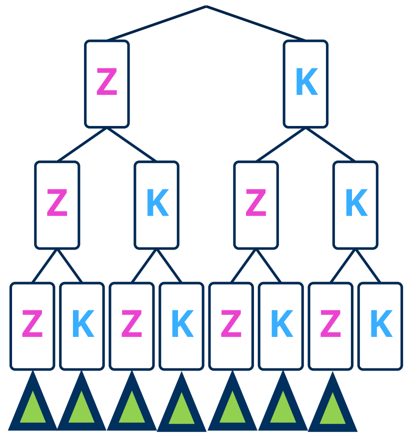
Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übersicht Unterscheide von Mindestens, Maximal und Genau

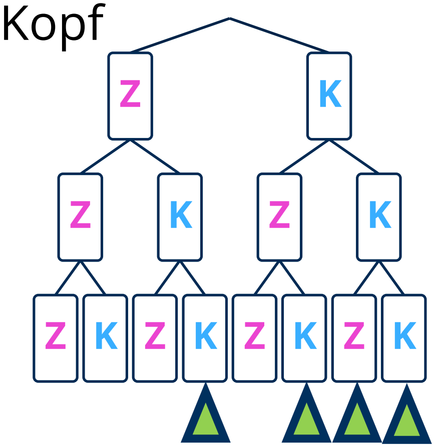
Genau 2 x Kopf



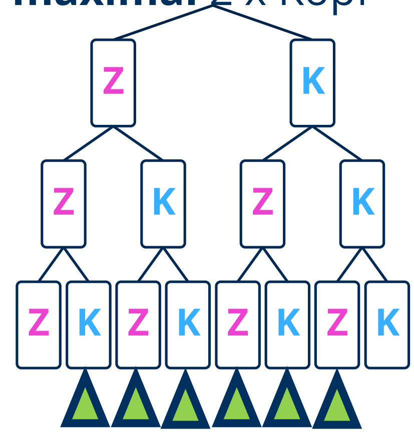
Maximal 2 x Kopf



Mindestens 2 x Kopf



Mindestens 1 **maximal** 2 x Kopf



½*½*½ + ½*½*½ + ½*½*½

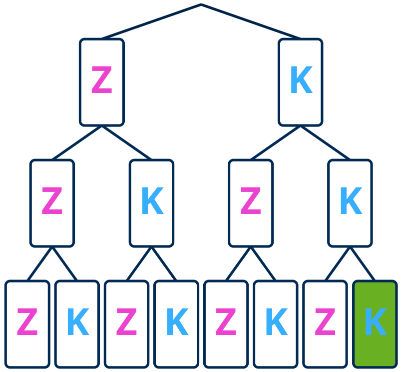
= 0,375

Oder:

Binominalverteilung

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Zum Vergleich: Drei Mal hintereinander Kopf



Definition: n = Anzahl der Elemente; k = Anzahl der Plätze

Bei drei Ziehungen genau alles das gleiche Ereignis (Kopf)

$= \frac{1}{n^k} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

1 weil, es gibt nur eine Möglichkeit, dass an alle k Plätzen Kopf haben.

ALTERNATIVE: $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Wahrscheinlichkeiten Übung

Beispiel: 3 Kugeln (1,2,3) mit Zurücklegen. Alle Fälle: $3^3 = 27$

Maximal / Genau eine 1:

1XX = 4 Möglichkeiten

X1X = 4 Möglichkeiten

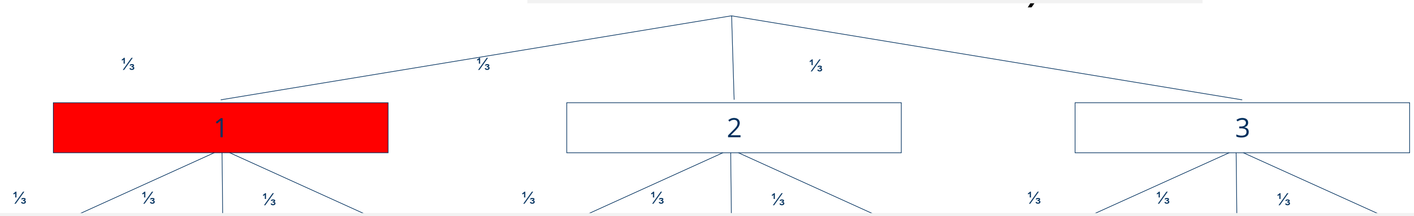
XX1 = 4 Möglichkeiten

4*3 = 12 -> 12/27 oder (1/3*2/3*2/3)*3

Mindestens eine 1:

Keine 1:

Drei Mal 1:



Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Binominalverteilung: Aufgabe

Ein Schütze hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 50 %. Er schießt 10 mal.

a) Wie lautet der Erwartungswert?

b) Wie wahrscheinlich trifft er genau so oft wie der Erwartungswert (a)?

c) Wie wahrscheinlich trifft er **maximal** 2 mal?

d) Wie wahrscheinlich trifft er **mindesten**s 3 mal?

Lösung

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Bernouli-/Binominalverteilung und Hypergeometrische Verteilung

Bernouli-/Binominalverteilung

- Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit sich **nicht ändert** pro gezogene Schraube.
- Beispiel: 10 Prozent aller Schrauben haben ein Defekt. 100 Schrauben wird der Tagesproduktion entnommen. Mit welcher P sind **genau** 5 defekt?
- $P(N=k)=\binom{100}{15}*10^{15}*(1-10)^{100-15}$
- = 0,032

Hypergemoetrische Verteilung

- Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit **sich ändert** pro gezogene Schraube.
- Beispiel: Es werden 1000 Schrauben produziert. 10 Prozent davon sind defekt. Davon werden 50 gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 5 davon defekt sind.
- $\frac{\binom{100}{5}\binom{1000-100}{50-5}}{\binom{1000}{50}}$
- = 0,189

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Hypergeometrische Verteilung

Bevorzugte Menge in Gesamtmenge.

Gewünschte Häufigkeit

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Nicht bevorzugte Menge

Nicht gewünschte Menge

Wie viel sind es insgesamt?

Wie viel werden gewählt?

N = Anzahl aller Objekte
M = Anzahl der gewünschten Objekte
n = Anzahl gezogener Objekte
k = gewünschte Häufigkeit

Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung:

$$E(x) = n * \frac{M}{N}$$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne sind 50 weiße und 4 Schwarze Kugeln. Sie ziehen 6 zufällige Murmeln. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich daraunter eine schwarze Murmel befindet? Wie lautet der Erwartungswert bei 6 Kugeln?

M = 4, N = 54, n = 6, k = 1

Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{54-4}{6-1}}{\binom{54}{6}} = 0{,}328 = 32{,}8$$

Erwartungswert:

$$n * \frac{M}{N} = 6 * \frac{4}{54} = 0{,}444$$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Hypergeometrische Verteilung: Übung

Eine Firma produziert Stifte und behauptet 3 Prozent der Stifte defekt sind. Sie kaufen eine Stichprobe von 4 und stellen fest, dass 1 Stift defekt ist. Glauben Sie dem Garantiversprechen der Firma?

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

N = 100; M = 3; n = 4; k = 1

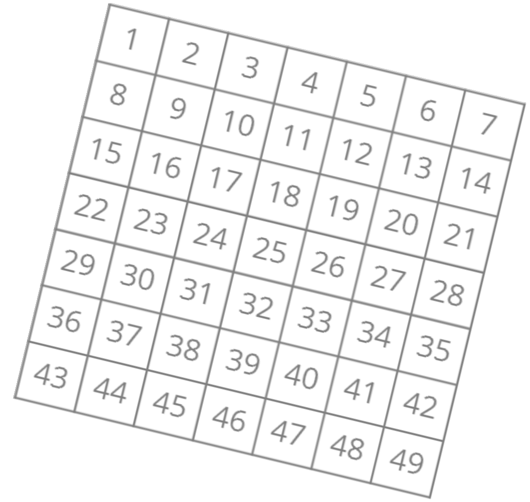
Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übung Hypergeometrische Verteilung

In einer Kiste sind 20 schwarze und zwei weiße Kugeln. Wenn Sie zwei Kugeln ziehen, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter eine schwarze befindet?

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Hypergeometrische Verteilung Übung



Übung: Berrechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für 0,1,2,3,4, 5 und 6 richtige beim Lotto mit 6 aus 49 Zahlen.

Lösung

0:

1:

2:

3:

4:

5:

6:

Formel: Hypergeometrische Verteilung

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Geometrische Verteilung: Warten auf den ersten Erfolg

Die geometrische Verteilung fragt, wann tritt etwas das erste Mal auf?

Sie werfen einen Würfel, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten Wurf die erste Sechs erscheint?

= P für „Nicht 6“ beim ersten Wurf + P für „6“ beim zweiten Wurf

= 5/6 *1/6 = ...

Verallgemeinert:

x = 4 Würfe

F(x|P) = (1- P)^(x^1) * P

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC

Übersicht: Wahrscheinlichkeitsmodelle

Wonach ist gefragt?	Diskrete Verteilung
P für bestimmte Anzahl?	**Binominialverteilung** **Hypergeometrische Verteilung**
Wann etwas das erste Mal auftritt.	Geometrische Verteilung

Creative Commons: Attribution-NonComercial CC BY-NC