Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Prof. Dr. A. Voß-Böhme, Dr. K. Fischer

Sommersemester 2023
Abgabe am 7. April 2023

Wirtschaftsmathematik II
Hausaufgabe 1

Fotografieren/scannen Sie Ihre **handschriftlichen** Lösungen (mit Namen und Matrikelnummer) und laden Sie diese als **genau eine** PDF-Datei **bis Freitag, 07.04.2023, 23:00 Uhr** im OPAL-Kurs unter Hausaufgaben, 1. Hausaufgabe, hoch.

Der Lösungsweg muss mit Hilfe eines einfachen wissenschaftlichen Taschenrechners (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, o.ä.), ohne Benutzung der SOLVE-Funktion, nachvollziehbar sein. Fragen sind mit einem Antwortsatz zu beantworten.

Aufgabe 1: Gegeben sei die reelle Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_k = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}.$$

(a) Geben Sie die ersten drei Folgenglieder a_1, a_2 und a_3 an.

(b) Überprüfen Sie, ob es sich bei der gegebenen Folge um eine geometrische Folge handelt.

(c) Ist die Zahlenfolge nach oben beschränkt? Falls ja, geben Sie die kleinste obere Schranke an.

(d) Ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent? Falls ja, geben Sie deren Grenzwert an. Falls nicht, begründen Sie dies kurz.

(e) Bilden Sie die ersten drei Glieder s_1, s_2 und s_3 der Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(f) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Glieder der Partialsummenfolge s_n wie folgt berechnet werden können:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

(g) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 35}{x^3 - 12x^2 + 35x}.$$

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D_f der Funktion an und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to-5} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\searrow 7} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$

Aufgabe 1: Gegeben sei die reelle Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_k = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}.$$

(a) Geben Sie die ersten drei Folgenglieder a_1, a_2 und a_3 an.

$$a_1 = \frac{1}{(3\cdot 1-2)(3\cdot 1+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$a_2 = \frac{1}{(3\cdot 2-2)\cdot(3\cdot 2+1)} = \frac{1}{4\cdot 7} = \underline{\underline{\frac{1}{28}}}$$

$$a_3 = \frac{1}{(3\cdot 3-2)(3\cdot 3+1)} = \frac{1}{7\cdot 10} = \underline{\underline{\frac{1}{70}}}$$

(b) Überprüfen Sie, ob es sich bei der gegebenen Folge um eine geometrische Folge handelt.

Verhältnis zw. a_k und a_{k+1}

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(3k-2)(3k+1)}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)} = \frac{(3k-2)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{3k-2}{3k+4} \Rightarrow \text{nicht konst.}$$

Damit a_k eine geometrische Folge sein kann, muss das Verhältnis von a_{k+1} und a_k konstant sein. Dies ist hier nicht der Fall. also keine geom. Folge.

(c) Ist die Zahlenfolge nach oben beschränkt? Falls ja, geben Sie die kleinste obere Schranke an.

Ja die Zahlenfolge ist nach oben beschränkt.

?

(d) Ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent? Falls ja, geben Sie deren Grenzwert an. Falls nicht, begründen Sie dies kurz.

$$a_k = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{9k^2+3k-6k-2}$$

$$= \frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{k^2\left(\frac{1}{k^2}\right)}{k^2\left(9-\frac{3}{k}-\frac{2}{k^2}\right)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{9-\frac{3}{k}-\frac{2}{k^2}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(9-\frac{3}{k}-\frac{2}{k^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}}{\lim\limits_{k\to\infty} 9 - \lim\limits_{k\to\infty}\frac{3}{k} - \lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{k^2}}$$

$$= \frac{0}{9-0-0} = 0$$

Die Folge ist konvergent und hat einen Grenzwert von 0.

(e) Bilden Sie die ersten drei Glieder s_1, s_2 und s_3 der Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

$$s_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(3\cdot 1-2)(3\cdot 1+1)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$s_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{(3\cdot 2-2)(3\cdot 2+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7}$$

$$s_3 = \frac{3}{3\cdot 3+1} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}$$

(g) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3\cdot n+1} = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(3+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n} \quad | :n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

(f) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Glieder der Partialsummenfolge s_n wie folgt berechnet werden können:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Induktionsanfang:

$n = 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(3\cdot 1-2)(3\cdot 1+1)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3\cdot 1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Induktionsvoraussetzung:

S_n gilt für ein beliebiges $n \in N$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Induktionsbehauptung:

Es gilt für $n+1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + (n+1) = \frac{n}{3n+1} + (n+1)$$

$$= \frac{n}{3n+1} + \frac{(3n+1)(n+1)}{3n+1}$$

$$= \frac{(3n+1)(n+1)+n}{3n+1} = \frac{3n^2+3n+n+1+n}{3n+1}$$

$$= \frac{3n^2+5n+1}{3n+1} \neq \frac{n+1}{3(n+1)+1}$$

Die Behauptung gilt nicht für jedes $n+1$.

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 35}{x^3 - 12x^2 + 35x}.$$

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D_f der Funktion an und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (c) $\lim_{x\to-5} f(x)$

(d) $\lim_{x\searrow 7} f(x)$ (e) $\lim_{x\nearrow 0} f(x)$

Definitionsbereich: $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}^{0} - \frac{2}{x^2}^{0} - \frac{35}{x^3}^{0}}{-\frac{12}{x}^{0} + \frac{35}{x^2}^{0} + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{0}{1} = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 35}{x^3 - 12x^2 + 35x}$ $\quad t = -x$, $t \to \infty$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2 + 2t - 35}{-t^3 - 12t^2 - 35t}$ $\quad | : t^3$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} - \frac{35}{t^3}}{-\frac{12}{t} - \frac{35}{t^2} - 1}$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{0}{-1} = \underline{\underline{0}}$

Grenzwert für $x \to -\infty = 0$.

(c) $\lim_{x\to-5} f(x) = \lim_{x\to-5} \frac{(-5)^2 - 2\cdot(-5) - 35}{(-5)^3 - 12(-5)^2 + 35(-5)}$

$= \lim_{x\to-5} \frac{25 + 10 - 35}{-125 - 300 - 175}$

$= \underline{\underline{0}}$

Der Grenzwert für $f(x)$ gegen -5 ist 0.

(d) $\lim\limits_{x \downarrow 7} f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 35}{x^3 - 12x^2 + 35x}$

$= \dfrac{\cancel{(x-7)}(x+5)}{x(\cancel{(x-7)}(x-5))}$

$= \dfrac{(7+5)}{7 \cdot (7-5)}$

$= \dfrac{12}{14} = \underline{\underline{\dfrac{6}{7}}}$

e) $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{x^2 - 2x - 35}{x^3 - 12x^2 + 35x}$

$= \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{-0^2 - 2 \cdot 0 - 35}{-0^3 - 12 \cdot 0^2 + 35 \cdot 0}$

$= \lim\limits_{x \nearrow 0} \underline{\underline{\dfrac{+35}{0}}}$

↳ $x \nearrow 0$ existiert nicht