Musterlösung

Aufgabe: Man bestimme die Menge aller komplexen Zahlen z mit

$$|z+2-3i| < |z+i|.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl ist $|z| = |x+i\,y| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Deshalb stellen wir jede komplexe Zahl in der algebraischen Form dar und bestimmen dann den Betrag.

$$|z+2-3i| = |x+i\,y+2-3i| = |(x+2)+i(y-3)| = \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$$

und

$$|z+i| = |x+i\,y+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}.$$

Damit ergibt sich die Ungleichung

$$|z+2-3i| = \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} < \sqrt{x^2+(y+1)^2} = |z+i|,$$

die äquivalent zur Ungleichung

$$(x+2)^2+(y-3)^2 < x^2+(y+1)^2$$

ist. Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} x^2+4x+4+y^2-6y+9 < x^2+y^2+2y+1 &\iff 4x+13 < 8y+1 \\ &\iff y > \frac{x}{2}+\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

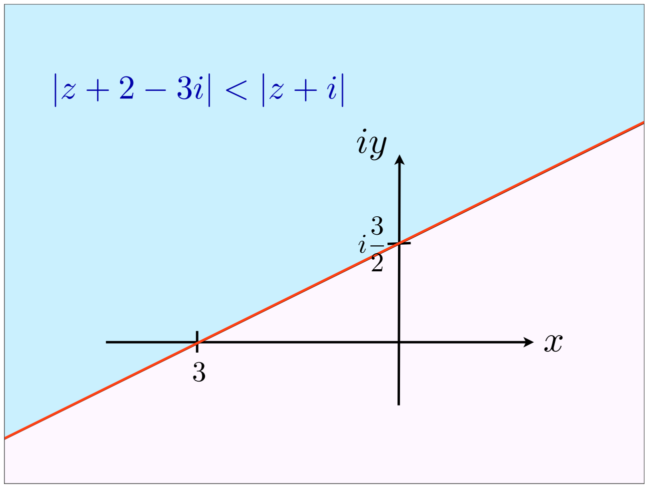

Abbildung 1: Die Menge dieser komplexen Zahlen liegt oberhalb der Geraden.