Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Prof. Dr. M. Hamann, Dipl.-Math. techn. T. Etling Dresden, 5. Dezember 2022

Algebra und höhere Mathematik 1 für Medieninformatik - WS2022/23
Übung 5: Lineare Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme

Aufgaben mit Lösungshilfe

Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise und -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für die folgenden Koeffizientenmatrizen $\mathbf{A}$ und Vektoren $\mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix};$ (b) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$

$$\text{(c)} \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Beantworten Sie die folgenden Fragen bitte mit einer kurzen Begründung:

(i) Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m < n$ genau eine Lösung haben?

(ii) Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m > n$ unendlich viele Lösungen haben?

(iii) Kann ein homogenes lineares Gleichungssystem genau eine nichttriviale Lösung haben?

(iv) Kann ein homogenes lineares Gleichungssystem keine Lösungen haben?

Aufgabe 3: Für ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit 3 Gleichungen und 3 Variablen erhielt man nach einem Iterationsschritt des Gauß-Verfahrens die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & a-2 & b+1 \end{array}\right),$$

wobei a und b zwei reelle Parameter seien.

(a) Überführen Sie diese erweiterte Koeffizientenmatrix mit Hilfe des Gauß-Verfahrens in Zeilenstufenform.

(b) Für welche Wahl der Parameter a und b hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen? Geben Sie die Lösungen für diesen Fall (in Vektorschreibweise) an.

(c) Welchen Rang hat die Matrix $\mathbf{A}$ für $a = 6$ und $b = -1$? Welchen Rang hat die Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ in diesem Fall?

(d) Es sei $a = 3$. Für welche Wahl von b ist $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit $x_3 = 1$ die einzige Lösung des Gleichungssystems? Welchen Wert haben x_1 und x_2 in diesem Fall?

Aufgabe 4: Es seien die Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und der Spaltenvektor $\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Der Vektor $\mathbf{x}_1$ ist ein *Eigenvektor* der Matrix $\mathbf{A}$. Wie lautet der zugehörige *Eigenwert*?

(b) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte und Eigenvektoren!

Aufgabe 5: Gegeben Sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 6$ ein Eigenwert dieser Matrix ist.

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\lambda_1 = 6$, verwenden Sie dafür den Gauß-Algorithmus.

(c) Überprüfen Sie, ob die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auch Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ sind. Falls ja, dann geben Sie den dazugehörenden Eigenwert an.

Selbstständige Bearbeitung

Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den „Aufgaben mit Lösungshilfe“ an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 6: Gegeben sei sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, der Matrix A^T und der Matrix $2 \cdot A$.

(b) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} der Matrix A.

(c) Berechnen Sie die Determinante der inversen Matrix A^{-1}

(d) Stellen Sie die Matrixgleichung

$$2 \cdot (XA)^T = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 6 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

nach X um und berechnen Sie X.

Aufgabe 7: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet der Vektor $\mathbf{b}$ der rechten Seite, wenn ein Lösungsvektor $\mathbf{x} = (1, 0, -2, 1, 3)^\top$ bekannt ist?

Aufgabe 8: Lösen Sie möglichst effektiv das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für die folgende Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und jeweils mehrere Vektoren $\mathbf{b}_k$:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 := \begin{pmatrix} 9.8 \\ 4.2 \\ -3.5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für die folgende Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\mathbf{b}$ keine Lösung hat:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$