Ingenieurmathematik I für Bauingenieure 2. Beleg

Der Beleg gilt als bestanden, wenn von den 43 Punkten insgesamt 21 Punkte erreicht wurden.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*)
Seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ dreidimensionale Einheitsvektoren. Weiter sei

$$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}\,.$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$ und das Vektorprodukt $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Vereinfachen Sie die dabei entstehenden Ausdrücke soweit wie möglich.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)
Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ beliebige invertierbare Matrizen und $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix passenden Typs. Vereinfachen Sie den nachfolgenden Matrizenausdruck:

$$[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}](\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}\,.$$

Aufgabe 3 (*12 Punkte*)
Berechnen Sie ohne elektronische Hilfsmittel die Art und die Anzahl der verschiedenen Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter a.

a) $f_a(x) = ax^2 - 2x + 1$ b) $f_a(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (1-a)x + 2a - 2$ c) $f_a(x) = \dfrac{a^2}{x} + x - 1$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)
Betrachten Sie die stückweise definierte Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & , \quad \text{für } 0 \le x \le 3 \\ 11 - 4x & , \quad \text{für } 3 < x \le 4 \\ -9 + x & , \quad \text{für } 4 < x \le 6\,. \end{cases}$$

Skizzieren Sie ohne elektronische Hilfsmittel den qualitativen Verlauf der Funktion f und berechnen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert an den Nahtstellen $x = 3$ und $x = 4$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)
Bilden Sie ohne elektronische Hilfe die Umkehrfunktionen der nachfolgenden Funktionen, falls notwendig nach angemessener Einschränkung des Definitionsbereichs. Berechnen Sie zudem von den Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich. Die auftretenden Parameter seien alle von Null verschieden.

a) $f(x) = \dfrac{a}{a - \mathrm{e}^{-x}}$ b) $f(x) = x^2 + bx + c$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)
Es seien p und q Polynome in x mit $\deg p = m$ und $\deg q = n$ und $n > m$. Vervollständigen Sie!

a) $\deg(p(x) + q(x)) =$ b) $\deg(p(x) \cdot q(x)) =$ b) $\deg(3 \cdot q(x)) =$ d) $\deg(x^5 \cdot q(x)) =$