Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Frank Henschel, Michael Meinhold

Dresden, 25. November 2022

Mathematik 1 - WS2022/23
Übungsblatt 9

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D der folgenden Funktionen und geben Sie den Wertebereich W an.

(a) $f_1 : x \mapsto 1 + \sqrt[3]{x + 2x^2}$

(b) $f_2 : x \mapsto 2|1 - x| + 3|2x - 3|$

(c) $f_3 : x \mapsto \tan(x + \phi)$, $\phi > 0$

(d) $f_4 : x \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \in \mathbb{R}^\times \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

(e) $f_5 : x \mapsto \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(x))\, x^2$

Die Funktion $f_4 : x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ wird *Signum*- oder *Vorzeichenfunktion* genannt. Warum?

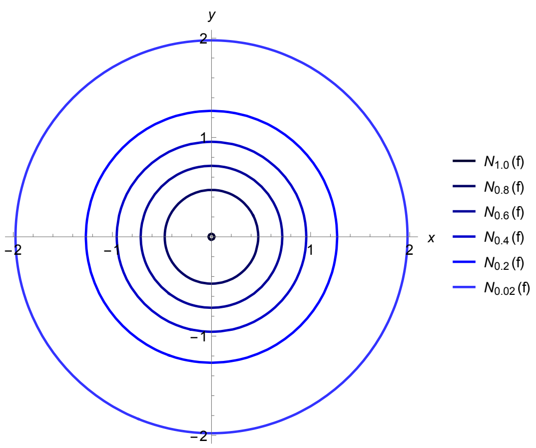
Aufgabe 2:

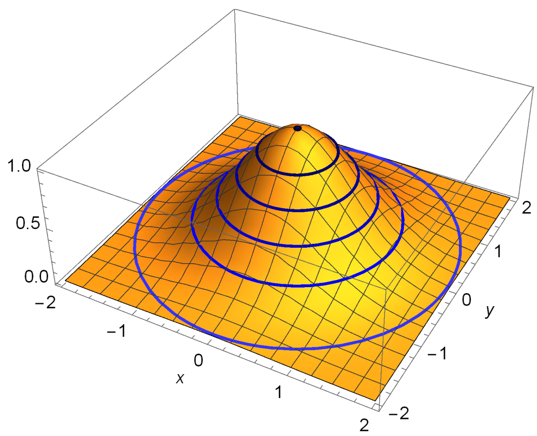
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D_f \to \mathbb{R}$. Für $c \in \mathbb{R}$ heißt $N_c(f) := \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$ die *Niveaumenge (Höhenlinie)* von f zum Niveau (zur Höhe) c.
Durch Zeichnen des Definitionsbereiches D_f und mehrerer Niveaumengen N_c für verschiedene Niveaus c im x, y-Koordinatensystem kann man sich oftmals eine dreidimensionale Vorstellung des Graphen von f verschaffen.

Beispiel: $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Bestimmung von $N_c(f)$:

$c = e^{-(x^2+y^2)} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = -\ln(c)$
$\rightarrow$ $N_c(f)$ ist ein Kreis um $M(0,0)$ mit Radius $\sqrt{-\ln(c)}$ und existiert nur für $c \in (0, 1]$





Das Bild $f(D_f)$ (d.h. der kleinstmögliche Wertebereich von f) besteht aus allen $c \in \mathbb{R}$ mit $N_c(f) \neq \emptyset$.

Zeichnen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \supseteq D_i \to \mathbb{R}$ mit dem größtmöglichen Definitionsbereich D_i jeweils ein Niveaulinienbild für fünf geeignete Niveaus c und machen Sie Aussagen dazu, wie der Graph von f_i aussieht. Geben Sie ferner jeweils das Bild $f_i(D_i)$ an.

$f_1(x, y) = 4 - x - 2y$ $\qquad$ $f_2(x, y) = x^2 - 2y$

$f_3(x, y) = xy$ $\qquad$ $f_4(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie eine Zuordnungsvorschrift der Folge (a_n), bestehend aus den folgenden gegebenen ersten Gliedern:

(a) $(25, 29, 33, 37, 41, \dots)$

(b) $(4, 12, 36, 108, 324, \dots)$

(c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right)$

(d) $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{2}{5}, \frac{\sqrt{5}}{6}, \dots\right)$

(e) $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3, \frac{15}{4}, \dots\right)$

(f) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots\right)$

Stellen Sie die Folge (a_n) jeweils graphisch dar!

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f : [1; \infty) \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

(a) Erklären Sie f als Komposition $g \circ h$ zweier umkehrbar eindeutiger Funktionen g und h.

(b) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} zu f und schreiben Sie diese als Komposition der Umkehrfunktion von g und h.

Hinweis: Eine reelle Funktion $f : D \to B$ mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und Wertemenge $W \subseteq B$ heißt **umkehrbar** genau dann, wenn eine Funktion f^{-1} existiert mit

$$f^{-1} \circ f : D \to D \quad \text{mit} \quad x \mapsto x = f^{-1}(f(x)) \quad \forall\, x \in D$$

und

$$f \circ f^{-1} : W \to W \quad \text{mit} \quad y \mapsto y = f(f^{-1}(y)) \quad \forall\, y \in W$$

Die Funktion $f^{-1} : W \to D$ heißt im Fall ihrer Existenz **Umkehrfunktion** von f auf D. Siehe auch https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/16615014400/CourseNode/98438441090903?10

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Welche Flächen im $\mathbb{R}^3$ werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben?

(a) $z = x - y$ $\qquad$ (b) $x^2 + y^2 = 9,\ z \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Aufgabe 6: Der Kolben eines Stoßdämpfers lege beim Einschieben einen Weg $x = x(t)$ zurück, welcher mit Hilfe der Gleichung $x(t) = 30\,\text{cm} \cdot \left(1 - e^{-2t\,\text{s}^{-1}}\right),\ t \geq 0\,\text{s}$ berechnet werden kann. Nach welcher Zeit ist der Kolben um 18 cm eingeschoben?

Aufgabe 7: Ein Hochspannungskabel hänge zwischen zwei Masten, die 60 m voneinander entfernt und gleich hoch sind. Die Form des durchhängenden Kabels kann bei geeigneter Wahl eines Koordinatensystems durch die Funktion $h(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ beschrieben werden, wobei das Kabel an seiner tiefsten Stelle 50 m über dem Boden hängt.

(a) Geben Sie a an und berechnen Sie die Höhe der Aufhängungen des Kabels.

(b) Aus Sicherheitsgründen muss unterhalb des Kabels der Bereich frei gelassen werden, bei dem das Kabel maximal $55\,m$ vom Boden entfernt ist. Wie breit ist dieser Bereich?