

# Beleg 3

Zufallsgrößen & Induktive Statistik  
Empirische Methoden für Informatiker

Nico Schramm

23INM-TZ

02. Februar 2025

## Inhaltsverzeichnis

Aufgabe BIII-1	2
Aufgabe BIII-2	4
Aufgabe BIII-3	6
Aufgabe BIII-4	8
Aufgabe BIII-5	10
Aufgabe BIII-6	12

## Aufgabe BIII-1

Für die Zufallsgröße  $X$  und  $Y$  sei bekannt, dass gilt

$$\text{Var}(X) = 4, \quad \text{Var}(Y) = 1, \quad \text{Var}(X + Y) = 6.$$

(a) Berechnen Sie die drei Varianzen  $\text{Var}(7 + 2X)$ ,  $\text{Var}(3X + 3Y)$  und  $\text{Var}(3X - 2Y)$ , die Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y)$  sowie die Korrelation  $\text{Kor}(X, Y)$ .

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$\implies \text{Var}(7 + 2X) = 2^2 \cdot \text{Var}(X) = 4 \cdot 4 = 16$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

$$\implies \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} (\text{Var}(X + Y) - \text{Var}(X) - \text{Var}(Y))$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \underbrace{(6 - 4 - 1)}_{= 1} = \frac{1}{2}$$

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : \text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$$

$$\begin{aligned} \implies \text{Var}(3X + 3Y) &= \text{Var}(3X) + \text{Var}(3Y) + 2 \text{Cov}(3X, 3Y) \\ &= 3^2 \cdot \underbrace{\text{Var}(X)}_{= 4} + 3^2 \cdot \underbrace{\text{Var}(Y)}_{= 1} + \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}_{= 18} \cdot \underbrace{\text{Cov}(X, Y)}_{= 0,5} \\ &= 9 \cdot 4 + 9 \cdot 1 + 18 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(3X + 3Y) = 54$$

$$\text{Var}(3X - 2Y) = \text{Var}(3X + (-2Y))$$

$$= \text{Var}(3X) + \text{Var}(-2Y) + 2 \text{Cov}(3X, -2Y)$$

$$= 3^2 \cdot \text{Var}(X) + (-2)^2 \cdot \text{Var}(Y) + 2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

$$= 9 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}(3X - 2Y) = 34$$

$$\text{Kor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

$$\text{Kor}(X, Y) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4 \cdot 1}} = \frac{1}{4}$$

(b) Sind die Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?

$X, Y$  stochastisch unabhängig  $\iff \text{Cov}(X, Y) = 0$

$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \neq 0 \implies X, Y$  nicht stochastisch unabhängig

(c) Sind die Zufallsgrößen  $-X$  und  $8Y - X$  unkorreliert?

$-X$  und  $8Y - X$  unkorreliert  $\iff \text{Cov}(-X, 8Y - X) = 0$

$$(*) \text{Cov}(A + C, B) = \text{Cov}(A, B) + \text{Cov}(C, B)$$

$$(**) \text{Cov}(A, A) = \text{Var}(A)$$

$$\text{Cov}(-X, 8Y - X) = \text{Cov}(8Y - X, -X)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \text{Cov}(8Y, -X) + \underbrace{\text{Cov}(-X, -X)}_{\stackrel{(**)}{=} \text{Var}(-X)}$$

$$= -8 \cdot \underbrace{\text{Cov}(Y, X)}_{\stackrel{(*)}{=} \text{Cov}(X, Y)} + \underbrace{\text{Var}(-X)}_{= (-1)^2 \text{Var}(X)}$$

$$= -8 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 4$$

$$\implies \text{Cov}(-X, 8Y - X) = 0$$

Somit folgt, dass die Zufallsgrößen  $-X$  und  $8Y - X$  unkorreliert sind.

## Aufgabe BIII-2

Die beiden (diskreten) Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  besitzen (nur genau) die (gemeinsamen) Einzelwahrscheinlichkeiten gemäß der Verteilungstabelle

X/Y	2	4	6
-1	0,15	0,05	$p$
0	$p$	0,15	0,10
1	0,15	$p$	0,10

mit einer gewissen Konstanten  $p \in \mathbb{R}$ .

(a) Ermitteln Sie den Wert von  $p$ .

$$\begin{aligned}
 1 &= 3 \cdot 0,15 + 3 \cdot p + 2 \cdot 0,10 + 0,05 \\
 1 &= 0,70 + 3p \\
 \implies p &= 0,10
 \end{aligned}$$

Somit folgt  $p = 0,10$ .

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz sowohl von  $X$  als auch von  $Y$ .

X/Y	2	4	6	$P(\{X = k\})$
-1	0,15	0,05	0,10	0,30
0	0,10	0,15	0,10	0,35
1	0,15	0,10	0,10	0,35
$P(\{Y = \ell\})$	0,40	0,30	0,30	1

$$\begin{aligned}
 E(X) &= -1 \cdot 0,30 + 1 \cdot 0,35 = 0,05 \\
 E(Y) &= 2 \cdot 0,40 + 4 \cdot 0,30 + 6 \cdot 0,30 = 3,80 \\
 E(X^2) &= (-1)^2 \cdot 0,30 + 1^2 \cdot 0,35 = 0,65 \\
 \implies \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 0,65 - 0,05^2 = 0,6475 \\
 E(Y^2) &= 2^2 \cdot 0,40 + 4^2 \cdot 0,30 + 6^2 \cdot 0,30 = 17,20 \\
 \implies \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 = 17,20 - 3,80^2 = 2,76
 \end{aligned}$$

Somit folgen die oben angegebenen Erwartungswerte und Varianzen für  $X$  und  $Y$ .

(c) Bestimmen Sie die Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y)$ .

$$\begin{aligned} E(XY) &= -1 \cdot 2 \cdot 0,15 - 1 \cdot 4 \cdot 0,05 - 1 \cdot 6 \cdot 0,10 \\ &\quad + 1 \cdot 2 \cdot 0,15 + 1 \cdot 4 \cdot 0,10 + 1 \cdot 6 \cdot 0,10 \end{aligned}$$

$$E(XY) = 0,2$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \\ &= 0,2 - 0,05 \cdot 3,80 \end{aligned}$$

$$\implies \text{Cov}(X, Y) = 0,01$$

Es folgt eine Kovarianz von  $\text{Cov}(X, Y) = 0,01$ .

(d) Ermitteln Sie den Wertebereich, die Einzelwahrscheinlichkeiten, den Erwartungswert und die Varianz von  $X + Y$ .

zusammengesetzte Zufallsgröße  $Z := X + Y$

$Z$	2	4	6
-1	1	3	5
0	2	4	6
1	3	5	7

Somit ergibt sich  $W_Z = \{1, \dots, 7\}$  als Wertebereich von  $Z$  sowie die folgenden Einzelwahrscheinlichkeiten:

$k$	$P(\{Z = k\})$
1	0,15
2	0,10
3	$0,15 + 0,05 = 0,20$
4	0,15
5	$0,10 + 0,10 = 0,20$
6	0,10
7	0,10

Für den Erwartungswert und die Varianz folgen:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} : E(aX + bY) &= a E(X) + b E(Y) \\ \implies E(X + Y) &= E(X) + E(Y) = 0,05 + 3,80 \\ \implies E(X + Y) &= 3,85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) \\ &= 0,6475 + 2,76 + 2 \cdot 0,01 \\ \implies \text{Var}(X + Y) &= 3,4275 \end{aligned}$$

## Aufgabe BIII-3

Die Zufallsgröße  $X$  beschreibe die erreichte prozentuale Punktzahl (eines Studierenden) bei Statistikklausuren. Hierbei sei (erfahrungsgemäß) der Erwartungswert 68 und die Varianz betrage 144.

$$E(X) = a = 68, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 = 144$$

- (a) Bestimmen Sie mittels verallgemeinerter Version des zentralen Grenzwertsatzes von DE MOIVRE-LAPLACE (näherungsweise, ohne Stetigkeitskorrektur) die Wahrscheinlichkeit  $p_a$  dafür, dass sich bei einer konkreten Stichprobe mit  $n = 44$  zufällig und unabhängig voneinander gewählter Studierenden ein Durchschnittsergebnis zwischen 65 und 80 Prozent einstellt.

$$\begin{aligned} Z_n &:= \frac{\sum_{k=1}^n X_k - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n X_k - na}{\sigma\sqrt{n}} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{n} \\ \cdot \frac{1}{n} \end{array} \right. \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \\ \implies Z_n &= \frac{X_n - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \\ \implies Z_{44} &= \frac{X_{44} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{X_{44} - 68}{\sqrt{144}} \cdot \sqrt{44} = \frac{X_{44} - 68}{12} \cdot \sqrt{44} \\ p_a &= P(\{65 \leq X_{44} \leq 80\}) \stackrel{(*)}{=} P(\{65 < X_{44} \leq 80\}) \\ &= P\left(\left\{ \frac{65 - 68}{12} \cdot \sqrt{44} < \underbrace{\frac{X_{44} - 68}{12} \cdot \sqrt{44}}_{= Z_{44}} \leq \frac{80 - 68}{12} \cdot \sqrt{44} \right\}\right) \\ &\approx P(\{-1,6583 < Z_{44} \leq 6,6332\}) \\ &= \Phi(6,63) - \Phi(-1,66) = \Phi(6,63) - (1 - \Phi(1,66)) \\ &= \underbrace{\Phi(6,63)}_{\approx 1} - 1 + \underbrace{\Phi(1,66)}_{\approx 0,9515} \\ &\approx 1 - 1 + 0,9515 \\ \implies p_a &\approx 0,9515 \end{aligned}$$

(\*) :  $Z$  stetige Zufallsgröße

Insgesamt ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Durchschnittsergebnis zwischen 65 und 80 Prozent einstellt, von  $p_a \approx 0,9515$ .

- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $p_b$ , dass ein zufällig ausgewählter Studierender ein Ergebnis zwischen 65 und 80 Prozent erreicht, wenn die Zufallsgröße  $X$  in guter Näherung als normalverteilt angesehen werden kann?

$$X \sim \mathcal{N}(68, 144)$$

$$Z = \frac{X - a}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{X - 68}{\sqrt{144}} = \frac{X - 68}{12} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned} p_b &= P(\{65 \leq X \leq 80\}) \stackrel{(*)}{=} P(\{65 < X \leq 80\}) \\ &= P\left(\left\{\frac{65 - 68}{12} < \underbrace{\frac{X - 68}{12}}_{= Z} \leq \frac{80 - 68}{12}\right\}\right) \\ &= P(\{-0,25 < Z \leq 1\}) \approx P(\{-0,25 < Z \leq 1\}) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-0,25) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0,25)) \\ &\approx 0,8413 - (1 - 0,5987) \\ p_b &\approx 0,44 \end{aligned}$$

(\*) :  $Z$  stetige Zufallsgröße

Insgesamt ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Durchschnittsergebnis zwischen 65 und 80 Prozent einstellt, von  $p_b \approx 0,44$ .

## Aufgabe BIII-4

Ein gewisses  $\vartheta \in (0, +\infty)$  sei die Zufallsgröße  $X$  auf dem Intervall  $[-\vartheta, 2\vartheta]$  stetig gleichverteilt (mit anderen Worten  $X \sim U(-\vartheta, 2\vartheta)$ , wobei der Parameter  $\vartheta \in (0, +\infty)$  unbekannt ist). Aufbauend auf einer zugehörigen mathematischen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  an  $X$  wird nun der Schätzer  $\hat{\Theta}$  betrachtet, welcher für  $n \in \mathbb{N}$  und gewissen  $c_n \in \mathbb{R}$  gegeben ist durch

$$T_n = c_n \sum_{j=1}^n X_j.$$

Bestimmen Sie jene Werte  $c_n \in \mathbb{R}$ , so dass dadurch der Schätzer  $\hat{\Theta}$  erwartungstreu hinsichtlich des unbekanntem Parameters  $\vartheta \in (0, +\infty)$  ist. Untersuchen Sie zudem, ob jene Wahl der Schätzer  $\hat{\Theta}$  auch konsistent für  $\vartheta \in (0, +\infty)$  ist.

$$X \sim \mathcal{U}(a, b) = U(-\vartheta, 2\vartheta)$$

$$\hat{\Theta} \text{ erwartungstreu} \iff E(T_n) = \vartheta$$

$$\begin{aligned} \vartheta &\stackrel{!}{=} E(T_n) = E\left(c_n \sum_{j=1}^n X_j\right) \\ &= c_n \cdot E\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = c_n \sum_{j=1}^n E(X_j) \stackrel{(*)}{=} c_n \cdot n E(X) \\ &\stackrel{(**)}{=} c_n \cdot n \cdot \frac{a+b}{2} \\ \vartheta &= c_n \cdot n \cdot \frac{-\vartheta + 2\vartheta}{2} = \frac{1}{2} \cdot c_n \cdot n \cdot \vartheta \\ \implies 1 &= \frac{1}{2} \cdot c_n \cdot n \\ \implies 2 &= c_n \cdot n \\ \implies c_n &= \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(\*) :  $X_1, \dots, X_n$  identisch verteilt

(\*\*) :  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

Hinreichende Bedingungen für Konsistenz

$$(I) \lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = \vartheta$$

$$(II) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_n) = 0$$

Bedingung (I) bereits oben bewiesen

Bedingung (II):

$$\begin{aligned}\text{Var}(T_n) &= \text{Var}\left(c_n \sum_{j=1}^n X_j\right) = c_n^2 \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} c_n^2 \sum_{j=1}^n \text{Var}(X) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \text{Var}(X) \\ \implies \text{Var}(T_n) &= \frac{4n}{n^2} \text{Var}(X) = \frac{4}{n} \text{Var}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \text{Var}(X) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X) \\ &= 0 \cdot \text{Var}(X) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_n) &= 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

(\*) :  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängig

Somit ist Bedingung (II) ebenfalls erfüllt.

Insgesamt folgt daraus, dass der Schätzer  $\hat{\Theta}$  für  $c_n = \frac{2}{n} \forall n \in \mathbb{N}$  erwartungstreu und konsistent ist.

## Aufgabe BIII-5

Die (diskrete) Zufallsgröße  $X$  unterliege einer Poisson-Verteilung, das heißt es gelte  $X \sim \text{Poi}(\eta)$  mit einem gewissen, unbekanntem Parameter  $\eta \in (0, +\infty)$ . Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert  $\hat{\eta}$  für  $\eta$  aufbauend auf einer konkreten Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  an der Zufallsgröße  $X$  (mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1 + \dots + x_n \in \mathbb{N}$ ).

$X \sim \text{Poi}(\eta)$  mit  $\eta \in (0, +\infty)$

$X$  Zufallsgröße mit Dichte  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t) = \frac{\eta^t}{t!} \exp(-\eta)$$

Somit folgt für die Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} L(\eta) &= \prod_{k=1}^n f(x_k) = \prod_{k=1}^n \frac{\eta^{x_k}}{x_k!} \exp(-\eta) \\ &= \exp(-\eta)^n \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\eta^{x_k}}{x_k!} \\ \implies L(\eta) &= \exp(-\eta n) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\eta^{x_k}}{x_k!} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Log-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} \ln(L(\eta)) &= -\eta n + \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{\eta^{x_k}}{x_k!}\right) \\ &= -\eta n + \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{\eta^{x_k}}{x_k!}\right) \\ &= -\eta n + \sum_{k=1}^n \ln(\eta^{x_k}) - \ln(x_k!) \\ \implies \ln(L(\eta)) &= -\eta n + \sum_{k=1}^n x_k \cdot \ln(\eta) - \ln(x_k!) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für lokale Extremstelle

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{d\eta} \ln(L(\eta)) \\ &= \frac{d}{d\eta} \left( -\eta n + \sum_{k=1}^n x_k \cdot \ln(\eta) - \ln(x_k!) \right) \\ &= -n + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\eta} \end{aligned}$$

$$0 = -n + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^n x_k \Big|_{\eta=\hat{\eta}}$$
$$\implies \hat{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}_n$$

Daraus folgt Kandidat für Extremstelle  $\hat{\eta} = \bar{x}_n$ , für welche überprüft werden muss, um welche Art von Extremstelle es sich handelt.

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \ln(L(\eta)) = \frac{d}{d\eta} n + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^n x_k = -\frac{1}{\eta^2} \sum_{k=1}^n x_k$$

Wenn nicht  $\forall k \in \mathbb{N} : x_k = 0$  gilt, ist zweite Ableitung immer kleiner als 0. Somit handelt es sich um eine Maximalstelle an  $\hat{\eta}$ . Daher ist  $\hat{\eta} = \bar{x}_n$  der Maximum-Likelihood-Schätzwert für  $\eta \in (0, +\infty)$ .

## Aufgabe BIII-6

Für die Gewichte von Packungen einer bestimmten Ware wird angenommen, dass sie (hinreichend genau) durch stochastisch unabhängige und identisch normalverteilte Zufallsgrößen mit Erwartungswert  $a$  und Varianz  $\sigma^2$  beschrieben werden können, wobei die wahren Werte der Parameter  $a$  und  $\sigma^2$  unbekannt seien. Eine konkrete Stichprobe vom Umfang  $n = 10$  aus dem Warenlager ergab für die Gewichte (in kg).

21,40 19,25 20,80 20,50 20,05 19,80 20,15 19,90 20,50 20,20.

$X_1, \dots, X_{10} \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$  mit  $a, \sigma^2$  unbekannt

$$\begin{aligned}\bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \\ \bar{X}_{10} &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} X_k = \frac{1}{10} \cdot 202,55 \\ \implies \bar{X}_{10} &= 20,255 \\ S_n &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2} \\ S_{10} &= \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{k=1}^{10} (X_k - 20,255)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 3,12725} \\ \implies S_{10} &\approx 0,5895\end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie sowohl ein konkretes zweiseitiges Konfidenzintervall sowie beide Varianten konkreter einseitiger Konfidenzintervalle für den Erwartungswert  $a$  zum Konfidenzniveau 0,99.

$$\begin{aligned}1 - \alpha &= 0,99 \implies \alpha = 0,01 \\ \implies \frac{\alpha}{2} &= 0,005 \implies 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995\end{aligned}$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} = t_{0,995; 9} \approx 3,25$$

$$t_{1-\alpha; n-1} = t_{0,99; 9} \approx 2,82$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} \approx 3,25 \cdot \frac{0,5895}{\sqrt{10}} \approx 0,6059$$

$$t_{1-\alpha; n-1} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} \approx 2,82 \cdot \frac{0,5895}{\sqrt{10}} \approx 0,5257$$

$$\begin{aligned} \text{beidseitig: } & \left[ \bar{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right] \approx [19,6491; 20,8609] \\ \text{linksseitig: } & \left( -\infty; \bar{X}_n + t_{1-\alpha;n-1} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right] \approx (-\infty; 20,7807] \\ \text{rechtsseitig: } & \left[ \bar{X}_n - t_{1-\alpha;n-1} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}; +\infty \right) \approx [19,7293; +\infty) \end{aligned}$$

Somit ergeben sie die oben aufgeführten Konfidenzintervalle für den Erwartungswert  $a$  zum Konfidenzniveau 0,99.

- (b) Bestimmen Sie sowohl ein konkretes zweiseitiges Konfidenzintervall sowie beide Varianten konkreter einseitiger Konfidenzintervalle für die Standardabweichung  $\sigma$  zum Konfidenzniveau 0,99.

$$\begin{aligned} 1 - \alpha = 0,99 & \implies \alpha = 0,01 \\ \implies \frac{\alpha}{2} = 0,005 & \implies 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \end{aligned}$$

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}^2 = \chi_{0,995;9}^2 \approx 23,6$$

$$\chi_{\frac{\alpha}{2};n-1}^2 = \chi_{0,005;9}^2 \approx 1,73$$

$$\chi_{1-\alpha;n-1}^2 = \chi_{0,99;9}^2 \approx 21,7$$

$$\chi_{\alpha;n-1}^2 = \chi_{0,01;9}^2 \approx 2,09$$

$$\begin{aligned} \text{beidseitig: } & \left[ \frac{n-1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}^2} S_n^2; \frac{n-1}{\chi_{\frac{\alpha}{2};n-1}^2} S_n^2 \right] \approx \left[ \frac{9}{23,6} \cdot 0,5895^2; \frac{9}{1,73} \cdot 0,5895^2 \right] \\ & \approx [0,1325; 1,8079] \end{aligned}$$

$$\text{linksseitig: } \left( 0; \frac{n-1}{\chi_{\alpha;n-1}^2} S_n^2 \right] \approx \left( 0; \frac{9}{2,09} \cdot 0,5895^2 \right] \approx (0; 1,4965]$$

$$\text{rechtsseitig: } \left[ \frac{n-1}{\chi_{1-\alpha;n-1}^2}; +\infty \right) \approx \left[ \frac{9}{21,7} \cdot 0,5895^2; +\infty \right) \approx [0,1441; +\infty)$$

Somit ergeben sie die oben aufgeführten Konfidenzintervalle für den Standardabweichung  $\sigma$  zum Konfidenzniveau 0,99.