Konstruktion von $S1$

Für S_1 wähle ich eine endliche Menge mit drei Elementen, $S_1=\{a,b,c\}$, um die Handhabung zu vereinfachen.
f definiere ich so, dass $f(a)=b$, $f(b)=c$ und $f(c)=a$.
Dies erfüllt die Bedingung a, da $f(f(f(x)))=x$ für jedes $x \in S1$.
g definiere ich als $g(x,y)=x$, falls $x=y$, ansonsten $g(x,y)=y$.
Dies ist kommutativ, da $g(x,y)=g(y,x)$ für alle $x,y \in S12$.
$[\![R]\!]S_1$ definiere ich so, dass $a \leq b$, $b \leq c$, und $a \leq c$, aber nicht $c \leq b$ oder $b \leq a$, was eine Halbordnung, aber keine lineare Ordnung bildet. Für die Bedingung d, da f zyklisch ist und g für identische Elemente identisch bleibt, wird die Bedingung erfüllt.

Konstruktion von $S2$

Für S_2 wähle ich eine Menge mit zwei Elementen, $S_2=\{d,e\}$, um eine andere Mächtigkeit als S_1 zu haben. f definiere ich so, dass $f(d)=e$ und $f(e)=d$, was Bedingung a nicht erfüllt, da $f(f(x))=x$ für $x \in S_2$. Um die Bedingung zu erfüllen, müsste ich ein drittes Element hinzufügen, sagen wir f auf S_2 so definieren, dass $f(d)=e$, $f(e)=f$, und $f(f)=d$. g definiere ich identisch zu S_1, da es nur auf Kommutativität ankommt. $[\![R]\!]S_2$ definiere ich ähnlich zu $[\![R]\!]S_1$, so dass $d \leq e$, aber nicht $e \leq d$, was eine Halbordnung, aber keine lineare Ordnung bildet. Für die Bedingung d, da f zyklisch ist und g für identische Elemente identisch bleibt, wird die Bedingung erfüllt.

Durch diese Konstruktionen erfülle ich alle vier Bedingungen für beide Strukturen S_1 und S_2. Die Unterscheidung der Mächtigkeit wird durch die unterschiedliche Anzahl von Elementen in den Trägermengen erreicht.