Teil (a): {¬,→}

Um zu zeigen, dass {¬,→} eine funktionale Junktorbasis ist, müssen wir beweisen, dass wir mithilfe von Negation (¬) und Implikation (→) alle anderen grundlegenden logischen Operatoren ausdrücken können, insbesondere **UND (∧)** und **ODER (∨)**. Diese beiden Operatoren sind ausreichend, um jede boolesche Funktion darzustellen.

Negation (¬): Die Negation ist bereits in der Menge enthalten.

Implikation (→): Die Implikation ist ebenfalls schon in der Menge vorhanden.

Konjunktion (∧): Wir können den Konjunktionsoperator (UND) durch Negation und Implikation ausdrücken:

$A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$

Beweis:

Die Aussage $A \rightarrow \neg B$ bedeutet "Wenn A wahr ist, dann ist B falsch".

$\neg(A \rightarrow \neg B)$ bedeutet "Es ist nicht der Fall, dass A wahr ist und B falsch ist.

"Dies ist äquivalent zu "Sowohl A als auch B sind wahr", was genau $A \wedge B$ bedeutet.

Disjunktion (ODER): Wir können den Disjunktionsoperator (ODER) ebenfalls mit Negation und Implikation ausdrücken:

$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$

Beweis:

Die Aussage $\neg A \rightarrow B$ bedeutet "Wenn A falsch ist, dann ist B wahr".

Dies entspricht der Aussage "Entweder A ist wahr oder B ist wahr", was der Definition von $A \vee B$ entspricht.

Da wir die Operatoren **UND** und **ODER** ausdrücken können, ist {¬,→} eine funktional vollständige Menge, also eine Junktorbasis.

Teil (b): {f,→}

Nun zeigen wir, dass die Menge {f,→} ebenfalls eine Junktorbasis ist, wobei f für die konstante Falschaussage steht (d.h., eine Aussage, die immer falsch ist).

Konstante Falschaussage (f): Diese gibt uns immer den Wert **falsch**.

Implikation (→): Die Implikation ist in der Menge vorhanden.

Negation (¬): Wir können die Negation einer Aussage A durch Implikation und die konstante Falschaussage ausdrücken:

$\neg A \equiv A \rightarrow f$

Beweis:

$A \rightarrow f$ bedeutet "Wenn A wahr ist, dann ist das Ergebnis falsch.

"Dies ist genau die Definition der Negation von A.

Konjunktion (∧): Da wir jetzt die Negation haben, können wir den **UND**-Operator ebenfalls ausdrücken:

$A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$

Beweis:

Durch Einsetzen der Definition von $\neg B$ (also $B \rightarrow f$) erhalten wir:

$A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow (B \rightarrow f)) \equiv (A \rightarrow (B \rightarrow f)) \rightarrow f$

Disjunktion (ODER): Der **ODER**-Operator lässt sich ebenfalls darstellen:

$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$

Beweis:

Da $\neg A \equiv A \rightarrow f$, können wir dies einsetzen:

$A \vee B \equiv (A \rightarrow f) \rightarrow B$

Da wir mit der Menge {f,→} die Operatoren **UND** und **ODER** ausdrücken können, ist auch diese Menge funktional vollständig und somit eine Junktorbasis