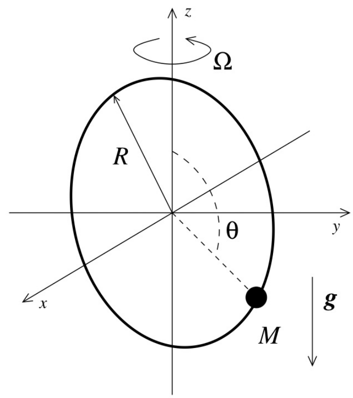
Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Eine Perle der Masse M gleite reibungsfrei auf einem Drahtring mit dem Radius R. Der Ring rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ um seinen Durchmesser im Schwerefeld $\vec{g} = -g\hat{z}$.



(a) Formulieren Sie die Zwangsbedinungen. Von welcher Art sind sie?

(b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und schreiben Sie die Lagrange-Gleichung auf.

(c) Zeigen Sie, dass für $\Omega < \sqrt{g/R}$ bei $\theta = \pi$ eine stabile Gleichgewichtslage vorliegt, während sich diese für $\Omega > \sqrt{g/R}$ bei $\theta = \pi - \arccos(g/R\Omega^2)$ befindet. *Hinweis*: Betrachten Sie kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage, d.h. $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$ mit $\varepsilon \ll 1$, und linearisieren Sie die Bewegungsgleichung bzgl. ε. Falls die Beschleunigung entgegen der Auslenkung ε gerichtet ist, ist die Gleichgewichtslage *stabil.*

(a) Ein-Teilchen Problem in 3D → 3 naive Freiheitsgrade

1. Formulieren d. Zwangsbedingungen

(i) Perle auf Ring: $|\vec{r}| = R$ (holonom-skleronom)

(ii) Ring rotiert gleichf. um z-Achse: $\varphi(\vec{r}(t)) = \Omega t$ (holonom-rheonom)

$\Rightarrow 3 - 2 = 1$ Freiheitsgrad

2. Wahl von Koordinaten

→ Kugelkoordinaten $r = R$, $\varphi = \Omega t$ sind festgelegt

→ generalisierte Koordinate: θ

(b)

3.1 Aufstellen d. kin. Energie

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$$

mit

$$d\vec{r} = h_r \, dr \, \hat{r} + h_\theta \, d\theta \, \hat{\theta} + h_\varphi \, d\varphi \, \hat{\varphi}$$

$$\underset{VL}{=} dr \, \hat{r} + r \, d\theta \, \hat{\theta} + r \sin\theta \, d\varphi \, \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin(\theta) \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

$$= 0 + R \dot{\theta} \hat{\theta} + R \sin(\theta) \Omega \hat{\varphi}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2\theta \right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2\theta \right)$$

3.2 Potentielle Energie

$\rightarrow$ Schwerefeld: $\vec{F} = -mg\hat{z} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = mgz = mgR\cos\theta$$

3.3 Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2\theta \right) - mgR\cos\theta$$

4 Bewegungsgleichungen

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \Omega^2 \sin\theta \cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \sin\theta \left(\Omega^2 \cos\theta + \frac{g}{R} \right)} \qquad (*)$$

(c) Lösung hier analytisch schwierig. Dennoch qualitative Diskussion mgl.

Suche stabile GGW-Lagen, d.h. Lsg. d. Form

$$\theta(t) = \theta_0 \quad \forall t$$

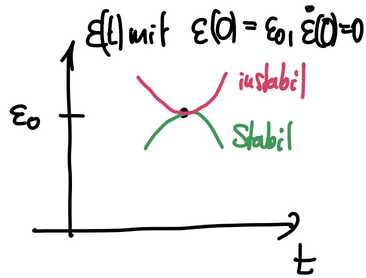
$$\Rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \ddot{\theta} \underset{(*)}{=} \sin\theta\left(\Omega^2\cos\theta + \frac{g}{R}\right)$$

$\Rightarrow$ Kandidaten für GGW-Lagen

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad \theta_3 = \pi - \arccos\frac{g}{R\Omega^2}$$

Um Stabilität zu untersuchen, müssen wir kleine Störungen um die GGW-Lagen betrachten: $\theta(t) = \theta_i + \varepsilon(t)$ mit $\varepsilon \ll 1$. Das GGW ist stabil, falls

$$\ddot{\varepsilon} = -\alpha\varepsilon, \quad \alpha > 0$$



(Betrachte AB $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 > 0$, $\dot{\varepsilon}(0) = 0$:

$$\Rightarrow \varepsilon(t) - \varepsilon_0 \underset{t\text{ klein}}{\simeq} \frac{1}{2}\ddot{\varepsilon}(0)t^2 = -\frac{\alpha}{2}\varepsilon_0 t^2 < 0 \quad)$$

Es ist instabil falls

$$\ddot{\varepsilon} = \alpha\varepsilon, \quad \alpha > 0.$$

Linearisiere Gleichungen:

$$\sin(\theta_0 + \varepsilon) = \sin(\theta_0) + \varepsilon\cos\theta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon) = \cos(\theta_0) - \varepsilon\sin\theta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Damit:

$\theta_1 = 0$: $\sin(\varepsilon) \simeq \varepsilon$, $\cos(\varepsilon) \simeq 1$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} = \varepsilon \underbrace{\left(\Omega^2 + \frac{g}{R}\right)}_{>0} \Rightarrow \underline{\text{instabil}}$$

$\theta_2 = \pi$: $\sin(\pi + \varepsilon) \simeq -\varepsilon$, $\cos(\pi+\varepsilon) \simeq -1$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} = -\varepsilon\left(\frac{g}{R} - \Omega^2\right)$$

für $\Omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ haben $\ddot{\varepsilon}$ u. ε verschiedene VZ

$\rightarrow$ <u>stabil</u>

für $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$: <u>instabil</u>

$\theta_3 = \pi - \arccos\left(\frac{g}{R\Omega^2}\right)$:

existiert nur falls $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ (da $\arccos : [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$

$\Rightarrow \left|\frac{g}{R\Omega^2}\right| < 1$)

linearisierte BWGL

$$\ddot{\varepsilon} = \left(\sin\theta_3 + \varepsilon\cos\theta_3\right)\cdot\left(\Omega^2 \underbrace{\cos\theta_3}_{= -\frac{g}{R\Omega^2}} - \varepsilon\Omega^2\sin\theta_3 + \frac{g}{R}\right)$$

$$= \left(\sin\theta_3 + \varepsilon\cos\theta_3\right)\left(-\varepsilon\Omega^2\sin\theta_3\right)$$

Ordnung ε^2

$$= -\varepsilon\Omega^2\underbrace{\sin^2\theta_3}_{=1-\cos^2\theta_3} + \cancel{\mathcal{O}}(\varepsilon^2) = -\varepsilon\Omega^2\underbrace{\left(1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}\right)}_{>0}$$

$\rightarrow$ für $\Omega > \sqrt{g/R}$ ist θ_3 stabil

Aufgabe 2:

Ein Massenpunkt der Masse m im Schwerefeld $\vec{K} = m\vec{g} = -mg\hat{z}$ unterliege der Zwangsbedingung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R = \text{const.}$$

Dies beschreibt ein dreidimensionales Pendel.

(a) Zeigen Sie, dass für die virtuellen Verrückungen $\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0$ gelten muss.

(b) Verwenden Sie die Aussage aus (a), um im d'Alembertschen Prinzip

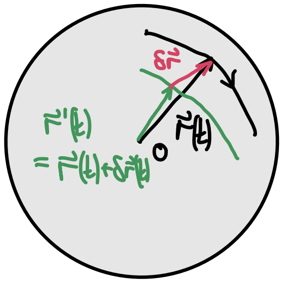
$$(\vec{K} - \dot{\vec{p}}) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

eine der Komponenten von $\delta\vec{r}$ zu eliminieren. Leiten Sie damit zwei gekoppelte Differentialgleichungen für die Ortskoordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ her. Diese Gleichungen sollen nicht gelöst werden. Die hier skizzierte Lösung direkt aus dem d'Alembertschen Prinzip ist offensichtlich nicht besonders günstig. Wie geht es besser?

(a) Zwangsbedingung $|\vec{r}| = R$ bedeutet Bewegung auf Kugelschale

Anschauung:

Seien $\vec{r}(t)$ u. $\vec{r}\,'(t)$ mit Zwangsbed. kompatible Trajektorien, die nur infinitesimal voneinander entfernt sind,



Dann sind virtuelle Verrückungen

$$\delta\vec{r}(t) := \vec{r}\,'(t) - \vec{r}(t)$$

tangential zur Kugeloberfläche, also $\delta\vec{r}(t) \perp \vec{r}(t)$

Wir zeigen also $\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0$

Betrachte dafür das Funktional

$$f[\vec{r}(t)] := \vec{r}(t_0)^2 = \vec{r}(t_0) \cdot \vec{r}(t_0) = R^2 \quad , \forall t_0$$

und eine inf. Verrückung $\delta\vec{r}(t)$:

$$f[\vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t)] = (\vec{r}(t_0) + \delta\vec{r}(t_0))(\vec{r}(t_0) + \delta\vec{r}(t_0))$$

$$= \underbrace{|\vec{r}(t_0)|^2}_{= f[\vec{r}(t)]} + 2\,\vec{r}(t_0) \cdot \delta\vec{r}(t_0) + |\delta\vec{r}(t_0)|^2$$

$\Rightarrow$ bis 1. Ordnung in $\delta\vec{r}$ haben wir:

$$2\,\vec{r}(t_0)\cdot\delta\vec{r}(t_0) \simeq f[\vec{r}(t)+\delta\vec{r}(t)] - f[\vec{r}(t)]$$
$$= R^2 - R^2$$
$$= 0$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Verrückung infinitesimal ist und dass diese die Zwangsbed. erhält.
Daraus folgt die Beh., da t_0 beliebig ist.

(b) D'Alembert'sches Prinzip: Zwangskräfte verrichten keine Arbeit unter virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \underbrace{\vec{Z}}_{\text{Zwangskräfte}}\cdot\delta\vec{r} \underset{\dot{\vec{p}}=\vec{K}+\vec{Z}}{=} (\vec{K}-\dot{\vec{p}})\,\delta\vec{r} \overset{!}{=} 0$$

wobei $\vec{K} = -mg\,\hat{z}$ die äußere Kraft ist

In Komponenten $(\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}})$:

$$-m\ddot{x}\,\delta x - m\ddot{y}\,\delta y - (mg + m\ddot{z})\,\delta z = 0 \qquad (*)$$

Aus (a):

$$0 = \vec{r}\cdot\delta\vec{r} = x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z \qquad (**)$$

Mit $(**)$, $-z\,\delta z = x\,\delta x + y\,\delta y$, ersetzen wir $z\,\delta z$ in $(*)$:

$$0 = -z\ddot{x}\,\delta x - z\ddot{y}\,\delta y + (g+\ddot{z})(x\,\delta x + y\,\delta y)$$
$$= [-z\ddot{x} + x(g+\ddot{z})]\,\delta x + [-z\ddot{y} + (g+\ddot{z})y]\,\delta y$$

$\forall\, \delta x, \delta y$.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= xg - z\ddot{x} + x\ddot{z} \\ 0 &= yg - z\ddot{y} + y\ddot{z} \\ \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{gekoppeltes System von ODE}$$

leichter zu lösen: $\phi(t)$ u. $\theta(t)$ als generalisierte Koordinaten verwenden u. Lagrange-Gleichungen 2. Art lösen.