# Integration echt gebrochen rationaler Funktionen

## Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine echt gebrochen rationale Funktion, d. h.

$$f : x \mapsto \frac{Z_m(x)}{N_n(x)} \text{ mit } x \in D \text{ , } m = \deg Z_m(x) \text{ , } n = \deg N_n(x) \text{ mit } m < n.$$

1. Das Nennerpolynom $N_n(x)$ ist als Produkt von Linearfaktoren anzugeben

$$N_n(x) = (x - x_{01})^{n_1} \cdot (x - x_{02})^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_{0k})^{n_k}$$

   mit $x_{0i} \in \mathbb{C}$ für $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ $(k \leq n)$ sowie $n_1 + n_2 + \ldots n_k = n$.

2. Setze für $x_{0i} \in \mathbb{R}$ den Partialbruch entsprechend der Zähligkeit von $n_i$

$$b_i = \frac{A_{i1}}{x - x_{0i}} + \frac{A_{i2}}{(x - x_{0i})^2} + \ldots + \frac{A_{in_i}}{(x - x_{0i})^{n_i}}$$

   mit unbekannten $A_{i1}, \ldots, A_{in_i}$. Für $x_{0i} \notin \mathbb{R}$ wird entsprechend

$$b_i = \frac{B_{i1}x + C_{i1}}{x^2 + p_i x + q_i} + \frac{B_{i2}x + C_{i2}}{(x^2 + p_i x + q_i)^2} + \ldots + \frac{B_{in_i}x + C_{in_i}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{n_i}}$$

   mit $x^2 + p_i x + q_i = (x - x_{0i}) \cdot (x - \bar{x}_{0i})$ gesetzt.

# Integration echt gebrochen rationaler Funktionen

## Partialbruchzerlegung

3. Bilde die Summe der Partialbrüche

$$f(x) = \frac{Z_m(x)}{N_n(x)} = \sum_{i=1}^{k} b_i$$

   und bilde den Hauptnenner.

4. Bestimme durch einen Koeffizientenvergleich die Koeffizienten

$$A_{i1}, \ldots, A_{in_i},\ B_{i1}, \ldots, B_{in_i},\ C_{i1}, \ldots, C_{in_i}$$

   (als Lösung eines linearen Gleichungssystems).

Falls $f(x)$ unecht gebrochen rational ist, d. h. $m \geq n$, so ist zuvor eine Polynomdivision auszuführen.

# Integration echt gebrochen rationaler Funktionen

## Partialbruchzerlegung

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{x-a}$ | $\ln\left(\lvert x-a\rvert\right)$ |
| $\frac{1}{(x-a)^k}\ (k\geq 2)$ | $-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$ |
| $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\ \left(D := p^2-4q<0\right)$ | $\frac{B}{2}\ln\left(\lvert x^2+px+q\rvert\right)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$ |
| $\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ (D<0;\,k\geq 2)$ | $\frac{(2C-Bp)x+Cp-2Bq}{(k-1)\left(4q-p^2\right)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+$ $\frac{(2k-3)(2C-Bp)}{(k-1)\left(4q-p^2\right)}\int\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}\mathrm{d}x$ |

Tabelle: Stammfunktionen von Partialbrüchen