

---

## Optimierung für Mathematiker/innen

### Übung 1

---

#### Aufgabe 1: Lineares Optimierungsproblem

Ein Zweitaktmotor wird mit einem Öl-Benzin-Gemisch betrieben. Dabei ist zu beachten, dass dieses Gemisch mindestens 4 Prozent Öl enthält, aber auch mindestens 85 Prozent Benzin. Das Gemisch soll möglichst kostengünstig sein. Formuliere eine passende Optimierungsaufgabe!

#### Aufgabe 2: Nichtlineares Optimierungsproblem

Ein Unternehmen will eine bestimmte Menge  $M$  eines Gutes einkaufen und holt dazu Angebote von  $n$  Lieferfirmen ein, von denen keine die gewünschte Gesamtmenge alleine liefern kann. Anbieter  $i$  liefert maximal  $m_i$ , wobei der Preis  $f_i(x_i)$  von der Bestellmenge  $x_i$  abhängt. Die Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sind monoton wachsend und (üblicherweise) konkav. Formuliere ein entsprechendes Optimierungsproblem, so dass die Gesamtkosten für alle Einkäufe minimiert werden.

#### Aufgabe 3: Ganzzahliges Optimierungsproblem

In einer Tischlerei werden drei Sorten Tische produziert. Die Lieferung einer Mindestanzahl von Tischen wurde bereits vertraglich mit den Kunden vereinbart. Erstellen Sie ein Modell, welches den Gewinn maximiert und die angegebenen Zeit- bzw. Materialkapazitäten einhält.

in gewissen Einheiten	Tisch 1	Tisch 2	Tisch 3	Kapazität
Gewinn je Stück	3	1	2	
Zeitaufwand je Stück	2	1	1	40
Materialaufwand je Stück	4	2	3	100
vereinbarte Menge	3	2	2	

#### Aufgabe 4: Lineares Optimierungsproblem

Eine Firma besitzt zwei Fabriken  $F_1, F_2$  und zwölf Verkaufsstellen  $V_1, \dots, V_{12}$ . Jede Fabrik  $F_i$  produziert pro Woche die Menge  $p_i$  eines bestimmten Produktes. Jede Verkaufsstelle  $V_j$  hat eine bekannte wöchentliche Nachfrage  $n_j$  an diesem Produkt, die

gedeckt werden muss. Die Kosten, eine Einheit von Fabrik  $F_i$  zur Verkaufsstelle  $V_j$  zu transportieren, seien  $c_{ij}$ , und die zu transportierende Menge sei  $x_{ij}$ . Wie muss die Produktion auf die Verkaufsstellen verteilt werden, um die Transportkosten zu minimieren und die Nachfrage zu decken?

### Aufgabe 5: Inverses Problem

Eine an einer Feder befestigte Masse  $m$  bewegt sich unter dem Einfluss von Dämpfung gemäß der Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = 0.$$

In einem Experiment mit Anfangsanregung

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

soll zu verschiedenen Zeitpunkten  $t_i, i = 1, \dots, N$  die Auslenkung  $y_i$  gemessen werden. Formuliere ein Optimierungsproblem zur Bestimmung der unbekanntenen Dämpfungs- und Federkonstanten  $r$  und  $k$ .

*Hinweis:* Die zu minimierende Zielfunktion soll die Abweichung der Lösung  $y(t)$  des Modells von der experimentell bestimmten Lösung  $y_i, i = 1, \dots, n$ , beschreiben.

### Aufgabe 6: Zusammenhang Definitheit und Eigenwerte einer Matrix

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **positiv definit** ( $A \succ 0$ ), falls

$$x^\top A x > 0$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$  gilt. Gilt nur „ $\geq$ “, so heißt sie **positiv semidefinit** ( $A \succeq 0$ ). Analog definiert man **negativ definit** ( $A \prec 0$ ) und **negativ semidefinit** ( $A \preceq 0$ ).

- Zeigen Sie: Eine *symmetrische* Matrix ist genau dann positiv definit (positiv semidefinit), falls alle Eigenwerte der Matrix positiv (nicht negativ) sind.
- Sind folgende Matrizen positiv (semi-)definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Hausaufgabe 1: Zuordnungsproblem

Fünf Reiter eines Reitvereins möchten an einem Dressurwettbewerb teilnehmen. Ihr Verein stellt fünf Schulpferde zur Verfügung. Die einzelnen Reiter kommen mit den verschiedenen Pferden unterschiedlich gut zurecht und haben damit auch unterschiedliche Gewinnchancen. Zudem verlangt das Reglement des Wettbewerbs, dass kein Reiter

und kein Pferd mehrfach starten darf. Es soll eine Zuordnung von Reitern zu Pferden gefunden werden, die die Summe der Gewinnchancen maximiert. Formuliere ein entsprechendes Optimierungsproblem!

**Hinweis:** Modellieren Sie das Problem mit Hilfe der folgenden Variablen.

$$\text{Entscheidungsvariablen } x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls Reiter } i \text{ auf Pferd } j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gegeben seien die Gewinnchancen von Reiter  $i$  auf Pferd  $j$  durch  $c_{ij}$ .

### Hausaufgabe 2: Frachtproblem

Es sollen  $5000 \text{ m}^3$  einer Ware innerhalb eines Planungszeitraumes vom Produzenten zu einem Kunden gebracht werden. Die Ware wird in gleichen quaderförmigen Behältern der Höhe  $x_1$ , Breite  $x_2$  und Länge  $x_3$  (in  $m$ ) transportiert, deren Volumen höchstens  $1 \text{ m}^3$  ist und die beim Kunden verbleiben. Das Material für Boden und die vier Seiten der Behälter kostet  $4.00 \text{ Euro pro } m^2$ . Die Deckel können aus einem Material hergestellt werden, das  $0.50 \text{ Euro pro } m^2$  kostet, von dem im Planungszeitraum aber nur  $6500 \text{ m}^2$  erhältlich sind. Die Frachtkosten betragen  $50 \text{ Euro}$  für jeden Behälter. Die Frage ist jetzt, wie die Behälter zu bemessen sind, um die Gesamtkosten möglichst gering zu halten. Modelliere diese Aufgabe.

### Hausaufgabe 3: Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte von den Matrixeinträgen

Beweisen Sie: Für zwei symmetrische Matrizen  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$|\lambda_k(A + E) - \lambda_k(A)| \leq \|E\|_2,$$

wobei die Eigenwerte aufsteigend sortiert sind ( $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ ). Insbesondere hängen die Eigenwerte stetig von den Einträgen der Matrix ab.

*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(E) \leq \lambda_k(A + E) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(E)$$

mittels des Minimax-Theorems von Courant-Fischer:

$$\lambda_k(A) = \min_{\substack{U \text{ Unterraum} \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x \in U \\ \|x\| = 1}} x^\top A x.$$