Lösung zu Aufgabe 5.3

Gegeben ist die Formelsammlung Φ und die Zielaussage $\psi = (a \land b)$. Es soll mittels des aussagenlogische
Resolutionsverfahrens überprüft werden, ob ψ aus Φ folgt.

Formelsammlung Φ:
1. $(c \land d) \rightarrow e$
2. $c \lor f$
3. $d \lor f$
4. $d \rightarrow a$
5. $e \rightarrow b$
6. $\neg f$

Zielaussage ψ: $a \land b$

Schritt 1: Umwandlung der Formeln in Klauselform (CNF)
1. $(c \land d) \rightarrow e$ ergibt die Klauseln: $(\neg c \lor e)$ und $(\neg d \lor e)$
2. $c \lor f$ bleibt unverändert.
3. $d \lor f$ bleibt unverändert.
4. $d \rightarrow a$ ergibt die Klausel: $(\neg d \lor a)$
5. $e \rightarrow b$ ergibt die Klausel: $(\neg e \lor b)$
6. $\neg f$ bleibt unverändert.

Klauselform von Φ:
$\Phi = \{ (\neg c \lor e), (\neg d \lor e), (c \lor f), (d \lor f), (\neg d \lor a), (\neg e \lor b), \neg f \}$

Schritt 2: Negation der Zielaussage
Die Zielaussage $\psi = (a \land b)$ wird negiert zu $\neg\psi = \neg(a \land b)$, was äquivalent ist zu $(\neg a \lor \neg b)$.
Diese Klausel wird der Formelsammlung hinzugefügt.

Erweiterte Formelsammlung Φ':
$\Phi' = \{ (\neg c \lor e), (\neg d \lor e), (c \lor f), (d \lor f), (\neg d \lor a), (\neg e \lor b), \neg f, (\neg a \lor \neg b) \}$

Schritt 3: Resolution
Die Resolution wird auf die Klauseln angewendet, bis ein Widerspruch ($\perp$) hergeleitet wird.

1. Aus $(c \lor f)$ und $\neg f$ folgt: c
2. Aus c und $(\neg c \lor e)$ folgt: e
3. Aus e und $(\neg e \lor b)$ folgt: b
4. Aus b und $(\neg a \lor \neg b)$ folgt: $\neg a$
5. Aus $\neg a$ und $(\neg d \lor a)$ folgt: $\neg d$
6. Aus $\neg d$ und $(d \lor f)$ folgt: f
7. Aus f und $\neg f$ folgt: $\perp$ (Widerspruch).

Schritt 4: Ergebnis
Da ein Widerspruch hergeleitet wurde, folgt, dass die Zielaussage $\psi = (a \land b)$ aus der Formelsammlung Φ

Antwort: Ja, die Formel $\psi = (a \land b)$ folgt aus Φ.