Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Prof. Dr. M. Hamann, Dipl.-Math. techn. T. Etling

Dresden, 17. November 2022

Algebra und höhere Mathematik 1 für Medieninformatik - WS2022/23
Übung 4: Matrizen und Determinanten

Aufgaben mit Lösungshilfe

Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise und -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie zu den oben genannten Matrizen alle geordneten Paare (X, Y) an, für die das Matrizenprodukt $X \cdot Y$ erklärt ist.

(b) Berechnen Sie die Matrix
(i) $4 \cdot A^2 - B \cdot C$, (ii) $C \cdot B - 2 \cdot E$

Aufgabe 2: Lösen Sie die Matrizengleichung

$$A \cdot B + \frac{3}{8} \cdot X = C - \frac{1}{8} \cdot X$$

worin die nachfolgenden Matrizen auftreten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Es sei der Vektor $\mathbf{x} = (1, 2)^\top$ gegeben.

(a) Geben Sie die Darstellung x_h von $\mathbf{x}$ in homogenen Koordinaten an, worin die homogenisierende Koordinate an 0-ter Stelle steht.

(b) Bestimmen Sie:

(i) eine Matrix S, die $\mathbf{x}_1$ auf seine doppelte Länge skaliert,

(ii) eine Matrix D, die $\mathbf{x}_1$ um den Koordinatenursprung um 90 Grad im Uhrzeigersinn dreht.

Geben Sie die Matrizen S und D auch in der homogenen Darstellung an.

(c) Berechnen Sie die Matrixprodukte $D \cdot S$ und $S \cdot D$. Was fällt Ihnen auf? Wie lässt sich dieser Sachverhalt geometrisch begründen?

Aufgabe 4:

(a) Berechnen Sie - für den Fall ihrer Existenz - die Inverse der folgenden Matrizen.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und geben Sie für diese die inverse Matrix C^{-1} an.

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie mit einer geeigneten Methode die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{sowie} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und } \lambda \cdot \begin{vmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{vmatrix}.$$

(b) Diskutieren Sie andere Methoden bzw. Lösungsansätze und deren Vor-/Nachteile.

(c) Diskutieren Sie den Einfluss der auftretenden Parameter $c_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ bzw. von $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$ auf den Wert der Determinante.

Selbstständige Bearbeitung

Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den „Aufgaben mit Lösungshilfe“ an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 6: Gegeben seien die reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie zu den oben genannten Matrizen alle geordneten Paare (X, Y) an, für die das Matrizenprodukt $X \cdot Y$ erklärt ist.

(b) Berechnen Sie die Matrix
(i) $4 \cdot A^2 - B \cdot C$, (ii) $C \cdot B - 2 \cdot E$.

Aufgabe 7: Gegeben sind die Vektoren $a \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Einträge von Matrizen A und B, so dass

$$a \times b = A \cdot b = B \cdot a$$

gelten, wobei die Produktzeichen $\times$ das Vektorprodukt und $\cdot$ die Matrixmultiplikation beschreiben.

Anmerkung: Überlegen Sie den Typ der zu bestimmenden Matrizen A und B, damit die Matrixmultiplikation ausführbar ist und den geforderten Typ des Produktes ergibt.

Aufgabe 8: Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man ermittle folgende Matrizen (sofern sie existieren):

(a) $A \cdot B$

(b) $A \cdot^{\top} B$

(c) $B \cdot A$

(d) $3 \cdot B \cdot C + 2 \cdot D^2$

(e) $D \cdot C$

(f) $C \cdot D$

(g) $6 \cdot (C \cdot B)^{\top} - 2 \cdot B^{\top} \cdot 3 \cdot C^{\top}$

(h) $C \cdot B \cdot A$

(i) $(B + C^{\top}) \cdot \big(B^{\top} + C\big)$

(j) $(C \cdot B + A)^2$

(k) $(C \cdot B)^2 + 2C \cdot B \cdot A + A^2$

Aufgabe 9:

(a) Lösen Sie die folgenden Matrixgleichung

$$X \cdot A \cdot B - A - X \cdot C = E$$

mit den reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Lösen Sie die folgenden Matrixgleichung

$$A \cdot X - B^{\top} = X,$$

mit den reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Produkte $D_\phi^2 = D_\phi \cdot D_\phi$ und $D_\phi^3 = D_\phi \cdot D_\phi \cdot D_\phi$ für die Matrix

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Formen Sie die Matrizenprodukte in die obige Form um! Welche geometrische Transformation lässt sich unter Nutzung der Matrix D_ϕ beschreiben?