Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden | Sommersemester 2021
Prof. Dr. A. Voß-Böhme, Dr. K. Fischer | Abgabe am 13. April 2021

Wirtschaftsmathematik II
Hausaufgabe 3

Fotografieren oder scannen Sie Ihre **handschriftlichen** (!) Lösungen (mit Angabe von Namen und Matrikelnummer) und laden Sie diese als **genau eine** PDF-Datei **bis Dienstag, 13.04.2021, 9:00 Uhr** im OPAL-Kurs unter Hausaufgaben, Hausaufgabe 3, hoch.

Der Lösungsweg muss mit Hilfe eines einfachen wissenschaftlichen Taschenrechners (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, o.ä), ohne Benutzung der SOLVE-Funktion, nachvollziehbar sein. Fragen sind mit einem Antwortsatz zu beantworten.

Aufgabe 1: Berechnen Sie mittels logarithmischer Differentiation für die nachfolgenden Funktionen f die erste Ableitung f'.

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad (x > 0)$$

Aufgabe 2: Ein Unternehmen besitze die Produktionsfunktion P mit

$$P(x) = -0.4x^2 + 436x - 46560, \quad x \in [120; 970],$$

wobei x das wöchentlich zugeführte Kapital in Geldeinheiten (GE) und P die damit hergestellte Menge (den Ertrag) in Kilogramm (kg) bezeichne.

(a) Welche Menge kann das Unternehmen wöchentlich bei einem Kapitaleinsatz von $x = 400$ GE herstellen?

(b) Bestimmen Sie die Grenzproduktionsfunktion zur Funktion P. Berechnen Sie die Grenzproduktivität für $x = 400$ GE und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

(c) Das Unternehmen hat finanzielle Schwierigkeiten und überlegt den Kapitaleinsatz von 400 GE auf 390 GE pro Woche zu senken. Berechnen Sie näherungsweise welche Änderung dies bei dem wöchentlichen Ertrag zur Folge hat.

(d) Geben Sie die zur Funktion P gehörende Durchschnittsertragsfunktion p an. Wie hoch ist der Durchschnittsertrag bei einem zugeführten wöchentlichen Kapital in Höhe von 400 GE?

(e) Das Unternehmen möchte den Durchschnittsertrag pro wöchentlich eingesetzter GE erhöhen. Sollte es dafür mehr oder weniger Geld investieren? Begründen Sie Ihre Antwort auf Basis der Ergebnisse der Teilaufgaben a) und d).

(f) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

Aufgabe 1

Voraussetzung $f(0) = (1 + \frac{1}{0})^0 \Rightarrow$ n.L.

$z(x) = \ln|f(x)| \quad , x \in \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} : g(x) = \ln|x|; \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$z(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)); \quad x \in D$

$$z'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$f'(x) = f(x) \cdot z'(x) \quad , x \in \mathbb{R}$

$$z(x) = \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}$$

$$z'(x) = \frac{\frac{1}{(\frac{1}{x}+1)x} - \ln(\frac{1}{x}+1)}{(\frac{1}{x}+1)^x}$$

$$f'(x) = \cancel{(1+\frac{1}{x})^x} \cdot \frac{\frac{1}{(\frac{1}{x}+1)x} - \ln(\frac{1}{x}+1)}{\cancel{(\frac{1}{x}+1)^x}}$$

$$= \frac{1}{(\frac{1}{x}+1)x} - \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

Aufgabe 2

$P(x) = -0{,}4x^2 + 436x - 46560 \quad , \quad x \in [120; 970]$

a) $P(400) = \underline{\underline{63840 \text{ kg}}}$

Das Unternehmen kann mit 400 GE 63840 kg pro Woche herstellen.

b) $P'(x) = -0{,}8x + 436$

$P'(400) = -0{,}8 \cdot 400 + 436 = \underline{\underline{116 \text{ kg}}}$

Wenn eine Geldeinheit zu 400 GE hinzukommt wird näherungsweise 116 kg zusätzlich produziert.

c) $P(390) = 62640 \text{ kg}$

$\Delta(P(400) \mid P(390)) = \underline{\underline{1200 \text{ kg}}}$

Der Ertrag sinkt um 1200 kg.

d) $p(x_0) = \frac{P(x)}{x}$

$p(400) = \underline{\underline{159{,}6 \text{ kg}}}$

$p'(x) = \frac{46560}{x^2} - \frac{2}{5}$

Die Firma sollte weniger Geld investieren, da sich der Durchschnittsertrag erhöht und somit sich jede eingesetzte GE mehr lohnt. Zum Beispiel bei 390 GE erhöht sich der Durchschnittsertrag auf 160,6 kg.

e) Da der Grenzertrag kleiner ist, deswegen sollte das Unternehmer weniger Kapital einsetzen, da der Durchschnittsertrag größer als der Grenzertrag ist.

f) $P'(x) = p(x)$

$$-0{,}8x + 436 = -0{,}4x + 436 - \frac{46560}{x} \quad | + 0{,}8x$$

$$436 = 0{,}4x + 436 - \frac{46560}{x} \quad | -436$$

$$0 = \frac{2}{5}x - \frac{46560 \cdot 5}{x \cdot 5}$$

$$0 = \frac{2x^2}{5x} - \frac{232800}{5x}$$

$$0 = \frac{2x^2 - 232800}{5x}$$

0-Stelle Zähler: $2x^2 - 232800 = 0 \quad | :2$

$$x^2 - 116400 = 0 \quad | + 116400$$

$$x^2 = 116400 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x_1 = 341{,}17 \qquad x_2 = -341{,}17$$

Wir erreichen bei: $x = 341{,}17$ unser Betriebsoptimum.