

Analysis – Grundlegende Konzepte

Version vom 01.03.2020 - last edited by: Stefan Neukamm

Stefan Neukamm ¹

Der vorliegende Text ersetzt weder den Besuch der Vorlesung noch das Studium von Lehrbüchern². Er basiert auf Lehrbüchern, Vorlesungsskripten von Kollegen, insbesondere von Prof. M. Brokate (TUM) und von Prof. R. Chill (TUD), sowie auf eigenen Gedanken.

Für Anmerkungen und Korrekturen an `stefan.neukamm@tu-dresden.de` bin ich dankbar.

**Dieser Text ist nur für die Hörer der Vorlesung
Analysis – Grundlegende Konzepte an der TU Dresden,
Wintersemester 2019/2020 bestimmt. Er darf nicht weitergegeben werden.**

¹ Professur für Angewandte Analysis, TU Dresden,

<https://tu-dresden.de/mn/math/wir/neukamm>

²Eine gut kommentierte Liste zu Lehrbüchern zur Analysis finden Sie auf der Webseite von Prof. Dr. Alexander Mielke: https://www.wias-berlin.de/people/mielke/Lehre/Ana1_ws16/Ana_I_2016_Lit.pdf

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	5
1.1	Aussagen und logische Verknüpfungen	6
1.2	Mengen und Quantoren	10
1.3	Beweisschemata	17
1.4	Indizes und Summenzeichen	17
1.5	Funktion	20
1.6	Relation	22
2	Die reellen Zahlen	26
2.1	Axiomatische Einführung der reellen Zahlen	26
2.2	Induktive Menge und vollständige Induktion	28
2.3	Folgerungen aus den Körperaxiomen	31
2.4	Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen	44
2.5	Folgerungen aus dem Supremumsaxiom	49
2.6	Eigenschaften der natürlichen Zahlen	54
2.7	Überabzählbarkeit der reellen Zahlen	57
3	Konvergenz von Folgen	60
3.1	Metrische Räume	64
3.2	Konvergente Folgen	66
3.3	Eigenschaften konvergenter Folgen	68
3.4	Rechnen mit Folgen	69
3.5	Konvergenzkriterien	71
3.6	Limes inferior und superior	77
4	Die komplexen Zahlen	82
4.1	Motivation	82
4.2	Der komplexe Zahlenkörper	85
4.3	$\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$	88
4.4	Die komplexe Zahlenebene	89
4.5	Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$	93
5	Reihen	94
5.1	Konvergenzkriterien	96
5.2	Umordnungssatz	102
5.3	Potenzreihe	103
5.4	Exponentialfunktion	106
6	Stetigkeit	113
6.1	Offene und abgeschlossene Mengen	113
6.2	Stetige Funktionen	115
6.3	Hauptsätze über reellwertige, stetige Funktionen	118
6.4	(Uneigentliche) Grenzwerte von Funktionen	120

7	Differenzierbarkeit	122
7.1	Differenzierbarkeitsregeln	124
7.2	Mittelwertsätze und Folgerungen	126
8	Trigonometrische Funktionen	129
A	Musterlösungen von ausgewählten Hausaufgaben	135
B	Ergänzendes Material	139
B.1	Folgen numerisch untersuchen — erste Schritte in MATLAB	139
B.2	Wurzeln berechnen und Bisektion	144
B.3	Periodische Folgen	146

Was ist Mathematik?

Wikipedia: Die Mathematik (altgriechisch *mathēmatikē téchnē* „die Kunst des Lernens“) ist eine Wissenschaft, welche aus der Untersuchung von geometrischen Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht.

Mathematiker:

A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

aus „A Mathematician’s Apology“ G. H. Hardy (1877-1947).

Mathematik als formales System. Die Wikipedia-Beschreibung betont den *formalen* Charakter der Mathematik: Mathematische Theorien basieren auf *Axiomen* und strikten Spielregeln, aus denen sich dann *Aussagen* und Eigenschaften zu abstrakten Strukturen ableiten lassen. An diese strikte Form mathematischer Deduktion muss man sich erst gewöhnen. Gerade in den ersten Studienjahren werden Sie viel Zeit damit verbringen, mit abstrakten Strukturen umzugehen und logisches Argumentieren – also das *Beweisen* – zu üben.

Mathematik ist kreativ. Der kompetente Umgang mit formalen Strukturen ist nur der Einstieg in die Mathematik: Als Mathematiker geht es nicht nur darum „Aussagen zu beweisen“. Genauso wichtig (oder sogar wichtiger und spannender) ist es, „neue Aussagen“ (sogenannte *Vermutungen*) zum Verhalten mathematischer Strukturen aufzustellen. Das geschieht in einem sehr kreativen Prozess, für den es notwendig ist, die formale Ebene zu verlassen und *Gefühl und Intuition* für die abstrakten Strukturen zu entwickeln. Auch das werden Sie im Studium erlernen und üben, z.B. in dem Sie in einem Seminar oder in einer Lerngruppe selber Mathematik erklären oder über diese diskutieren.

Mathematik ist Sprache der Wissenschaft. Mathematik wird häufig als *Sprache der Wissenschaften* bezeichnet. In der Tat werden mathematische Modelle in nahezu allen Wissenschaften verwendet, und die Möglichkeit Prozesse mathematisch zu beschreiben, zu simulieren und zu optimieren, ist zentraler Baustein technologischen Fortschritts. Historisch betrachtet wurde zwischen Mathematik und den benachbarten Wissenschaften lange Zeit gar nicht so genau unterschieden: Gottfried Wilhelm Leibniz galt als Philosoph und Mathematiker (und darüber hinaus auch als Jurist und Historiker), Leonhard Euler war Physiker und Mathematiker, und Johann Carl Friedrich Gauß galt als Mathematiker, Statistiker, Astronom, Geodät und Physiker. Angewandte Mathematik – Mathematik an

der Schnittstelle zu anderen Disziplinen – hat eine lange Tradition. Viele Entwicklungen innerhalb der Mathematik werden durch Fragestellungen aus anderen Wissenschaften angestoßen; ebenso finden auch häufig mathematische Theorien, die aus einer rein intrinsischen Motivation entwickelt wurden, Anwendungen in benachbarten Wissenschaften (z.B. Zahlentheorie in der Kryptographie oder nichtkommutative Algebra in der Quantenphysik).

Mathematik und Kunst. G. H. Hardy vergleicht die Mathematik in seiner Beschreibung mit der *Kunst*. In der Tat beschreiben Mathematiker ihre „Ergebnisse immer wieder mit ästhetischen Kategorien, als Objekte von großer Schönheit.“ Dies ist ein Zitat aus dem Online-Artikel „Mathematik ist...“ von Günter M. Ziegler auf der Webseite <https://www.mathematik.de/mathematik/was-ist-mathematik> der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Dort finden Sie auch viele weitere Aspekte zur Mathematik.

1 Grundbegriffe³

Die Mathematik befasst sich mit **Aussagen**, von denen man wissen will, ob sie **wahr** oder **falsch** sind. Ziel der Mathematik ist es, wahre Aussagen über vermutete **Zusammenhänge** zu machen. Dies erfolgt mit Hilfe der Sprache und den Spielregeln der **Logik**.

Die Objekte, mit denen die Mathematik hantiert, existieren im Denken. Sie können unmittelbare Entsprechungen im Alltagsbereich haben (etwa die Zahl 2), aber auch sehr weit von sinnlichen Erfahrungen entfernt sein.⁴

Mathematische Objekte, wie immer man sie auch interpretieren will, werden seit geraumer Zeit in der Sprache der **Mengenlehre** formuliert.

Die Aussagen und Objekte der Mathematik sind exakt und eindeutig. Da die Alltagssprache unscharf und häufig mehrdeutig ist, verwenden wir in der Mathematik häufig **Formeln**, **Symbole** und vielfältige **Kurzschreibweisen**, deren exakte Bedeutung vorher verabredet werden muss.⁵

Inhalte des Kapitels:

- Elemente der formalen Logik, Mengenlehre, Beweisschemata
- Schreibweisen: Variablen, Indizes, Summenzeichen
- Relation und Funktion

Wir gehen in diesem Kapitel davon aus, dass die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bekannt sind. Ob 0 eine natürliche Zahl ist oder nicht, ist reine Verabredungssache. In dieser Vorlesung ist sie eine natürliche Zahl. Ebenfalls nehmen wir an, dass die reellen Zahlen, die wir in Kapitel 2 axiomatisch einführen und systematisch untersuchen werden, bekannt sind.

Hinweis: Wir werden in dieser Vorlesung Elemente der klassischen Logik und Mengenlehre pragmatisch (naiv) einführen. Ein axiomatischer Zugang, z.B. die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZF oder ZFC), ist im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe möglich. Man kann zu diesen fundamentalen Themen ganze Vorlesungen füllen. Dies ist aber für die Entwicklung der Grundzüge der Analysis nicht notwendig und auch kein einfacher Einstieg in die Mathematik. Es lohnt sich aber bei Interesse sich mit diesen grundlegenden Fragen im späteren Verlauf des Studiums einmal zu beschäftigen.

³In diesem Kapitel folgen wir größtenteils (und zum Teil sogar wörtlich) dem Skript zur Analysis I von Prof. Dr. Martin Brokate (TU München) http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/an1_ws14.pdf

⁴Über das Verhältnis von Mathematik und Realität lässt sich viel sagen und kontrovers diskutieren. Das wollen wir hier nicht tun.

⁵Achtung: Die Bedeutung der Symbole kann sich in der Mathematik von Teilgebiet zu Teilgebiet, von Vorlesung zu Vorlesung, von Buch zu Buch, ja sogar innerhalb einer Schrift ändern! Häufig ist die Bedeutung erst aus dem Kontext ersichtlich.

1.1 Aussagen und logische Verknüpfungen

Die mathematische Logik befasst sich (vereinfacht beschrieben) mit Systemen bestehend aus Objekten und Regeln, die die Beziehung zwischen den Objekten erklären. Die Objekte sind nicht Zahlen oder Funktionen, sondern mathematische **Aussagen**. Die Regeln sind durch **logische Verknüpfungen** gegeben.

Während im täglichen Leben Aussagen häufig vage oder ungenau bleiben, so gilt für mathematische Aussagen:

Das Prinzip der Zweiwertigkeit.

Eine (**mathematische**) **Aussage** nimmt *genau einen* von zwei **Wahrheitswerten** (nämlich W wie „wahr“ oder F wie „falsch“) an.

Bezeichnet A eine Aussage, dann sagen wir statt „die Aussage A ist wahr“ auch „es gilt A “ oder „ A ist richtig“.

Beispiele 1.1 (Aussagen).

(1.1a) 12 ist durch 3 teilbar.

(1.1b) $10 + 11 = 101$.

(1.1c) Jede durch 6 teilbare natürliche Zahl ist auch durch 3 teilbar.

(1.1d) Guten Tag!

Bis auf (1.1d) sind das alles Aussagen. Die Aussagen (1.1a) und (1.1c) sind wahr, (1.1b) ist hingegen falsch.⁶

Aussage (1.1c) ist etwas komplizierter als die anderen beiden Aussagen: Während in (1.1a) und (1.1b) nur von bestimmten Zahlen (z.B. 12 und 3) die Rede ist, handelt (1.1c) von beliebig vielen Zahlen, z.B. $6, 12, 18, 24, 30$. In jedem Fall stellen wir fest, dass diese Zahlen auch durch 3 teilbar sind; aber wie können wir nachprüfen, dass dies auch für jede solche Zahl gilt? Durchprobieren ist nicht möglich, da es ja unendlich viele Zahlen sind. Wir werden gleich sehen, wie das geht.

Die Aussagen (1.1a) – (1.1c) sind Beispiele für mathematische Sätze. Ein (**mathematischer**) **Satz** besteht aus einer **Voraussetzung** und einer **Behauptung**. (Beides sind mathematische Aussagen).

In (1.1a) ist „ 12 ist durch 3 teilbar“ die Behauptung. Die Voraussetzung ist nicht explizit genannt, sie besteht aus dem Vorwissen über die natürlichen Zahlen.

Beispiel (1.1c) ist typischer:

Voraussetzung: n ist eine durch 6 teilbare natürliche Zahl.

Behauptung: n ist durch 3 teilbar.

⁶Wir nehmen hier natürlich an, dass wir mit natürlichen Zahlen, dargestellt im Dezimalsystem, arbeiten. Im Binärsystem ist (1.1b) wahr!

(Auch unser unausgesprochenes Vorwissen zu den natürlichen Zahlen ist Teil der Voraussetzung). Sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung enthalten in diesem Beispiel eine Variable, hier „ n “ genannt. Man spricht daher auch von einer **Aussageform** – erst durch Einsetzen der Variablen geht die Aussageform in eine Aussage über, die entweder wahr oder falsch ist. Je nach Wert für n können sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung (für sich genommen) wahr oder falsch sein: Beispielsweise sind für $n = 6$ sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung wahr, während für $n = 9$ die Behauptung wahr ist, während die Voraussetzung falsch ist.

Ein Satz ist wahr (oder auch **richtig**), falls „aus der Voraussetzung die Behauptung folgt“, d.h., falls die nachfolgende Aussage wahr ist:

(1.2) Wann immer die Voraussetzung wahr ist, ist auch die Behauptung wahr.

Um festzustellen, ob ein Satz richtig ist, führen wir einen Beweis. Beweise können unterschiedliche Strukturen haben. Ein **direkter Beweis** besteht darin, von der Voraussetzung schrittweise durch **logisches Schließen** zur Behauptung zu gelangen. Ein direkter Beweis zu (1.1c) geht wie folgt:

Beweis zu (1.1c). Sei n eine natürliche, durch 6 teilbare Zahl. Dann ist $m := \frac{n}{6}$ wieder eine natürliche Zahl. (Die Schreibweise „ $:=$ “ hebt hervor, dass die Variable auf der Seite des Doppelpunktes definiert wird). Es folgt $n = 6 \cdot (\frac{n}{6}) = 6m$ und $\frac{n}{3} = \frac{6m}{3} = \frac{6}{3} \cdot m = 2m$. Da $2m$ eine natürliche Zahl ist, ist auch $\frac{n}{3}$ eine natürliche Zahl. Also ist 3 ein Teiler von n . $\square$

Jeder Schritt in einem Beweis ist eine Aussage, deren Wahrheitswert „offensichtlich“ (Mathematiker*innen sagen gern auch „trivial“) ist. Was „offensichtlich“ ist, hängt allerdings sehr stark vom Betrachter ab, und wird sich auch bei Ihnen im Laufe des Studiums drastisch verändern.

Ob ein Beweis richtig ist, ist natürlich nicht von subjektiven Einflüssen abhängig, sondern kann innerhalb des Kalküls der Logik objektiv überprüft werden. Neben Aussagen und Aussageformen besteht dieser Kalkül aus **logischen Verknüpfungen** mit denen aus Aussagen neue **zusammengesetzte Aussagen** formuliert werden können. Im nachfolgenden stehen A und B für zwei Aussagen.

- Die **Negation** (Verneinung) von A ist genau dann wahr, wenn A falsch ist und wird mit „ $\neg A$ “ („nicht A “) bezeichnet⁷. Man kann „ $\neg A$ “ mit einer **Wahrheitstafel** definieren:

A	$\neg A$
W	F
F	W

Beispiele: Es bezeichne A die Aussage „das Glas ist voll“. Dann ist $\neg A$ die Aussage „das Glas ist nicht voll“ (und nicht etwa das Gegenteil „das Glas ist leer“).

⁷In der Literatur wird statt $\neg A$ auch die Schreibweise $\bar{A}$ verwendet. Das tun wir in dieser Vorlesung nicht, da wir den Oberstrich später mit einer anderen Bedeutung verwenden werden.

- Die **Konjunktion** (Und-Verknüpfung) zweier Aussage A und B wird mit „ $A \wedge B$ “ („ A und B “) bezeichnet und ist durch

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

definiert. Beispiel: Die Aussage „das Glas ist voll und der Eimer ist leer“ ist genau dann wahr, wenn sowohl das Glas voll ist als auch der Eimer leer ist.

- Die **Adjunktion** (Oder-Verknüpfung) zweier Aussage A und B wird mit „ $A \vee B$ “ („ A oder B “) bezeichnet und bedeutet in der Mathematik immer das „einschließende“ Oder (im Gegensatz zum „entweder - oder“):

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Beispiel: Ist die Aussage „das Glas ist voll oder der Eimer ist leer“ wahr, so kann auch der Fall vorliegen, dass sowohl das Glas voll ist als auch der Eimer leer ist.

- Die **Implikation** „ $A \Rightarrow B$ “ („aus A folgt B “, „ A impliziert B “) beschreibt, was in einem mathematisch Satz passiert, denn

mathematische Sätze sind Aussagen der Form „ $A \Rightarrow B$ “,

wobei A die Voraussetzung und B die Behauptung bezeichnet. Wie sollte die Wahrheitstabelle hierfür aussehen? Wir betrachten hierzu den Satz „Für jede natürliche Zahl n mit $n < 3$ gilt $n < 5$ “. Dieser Satz ist offensichtlich richtig. Bezeichnen wir mit $A(n)$ die Aussage „ $n < 3$ “ und mit $B(n)$ die Aussage „ $n < 5$ “, so können wir den Satz wie folgt formulieren:

Für jede natürliche Zahl n ist die Aussage $A(n) \Rightarrow B(n)$ wahr.

In der Regel unterschlägt man „Aussage ... ist wahr“ und schreibt kürzer

Für jede natürliche Zahl n gilt: $A(n) \Rightarrow B(n)$.

Wir ermitteln die Wahrheitswerte von $A(n)$ und $B(n)$ in den Fällen $n = 2, 4, 6$:

n	A	B
2	W	W
4	F	W
6	F	F

In allen dieser Fälle ist der Wahrheitswert von $A \Rightarrow B$ wahr. Im verbleibenden Fall (wenn $B = F$ und $A = W$ gilt) muss $A \Rightarrow B$ falsch sein, denn wir wollen diese Aussage ja als „ A impliziert B “ verstehen. Wir definieren daher die Implikation durch die Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W.

Wir sehen: Falls $A \Rightarrow B$ wahr ist, dann können zwei Fälle auftreten:

- A ist wahr. Dann ist auch B wahr.
- A ist falsch. Dann können wir nichts darüber sagen, ob B wahr oder falsch ist.

Ist $A \Rightarrow B$ wahr, so sagen wir auch: „Die Gültigkeit von A ist **hinreichend** für die Gültigkeit von B “ oder auch „Die Gültigkeit von B ist **notwendig** für die Gültigkeit von A “. Außerdem bedeutet $B \Leftarrow A$ das gleiche wie $A \Rightarrow B$.

- Die **Äquivalenz** zweier Aussagen A und B bedeutet, dass sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall „ $A \Leftrightarrow B$ “ und es gilt

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W.

Äquivalenzen tauchen beim Umformen von Ausdrücken ständig auf. Beispiel:

$$7x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 21x = 9.$$

Sie ergeben sich auch beim Umformen von Zusammengesetzten Ausdrücken.

Ähnlich wie bei Gleichungen mit Zahlen, lassen sich auch zusammengesetzte Aussagen umformen:

Beispiel 1.2. Seien A und B Aussagen. Es gilt

$$(1.3) \quad \neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A) \vee (\neg B).$$

Man kann (1.3) nachprüfen, indem man die Wahrheitstafeln der Aussagen auf beiden Seiten vergleicht und feststellt, dass diese immer die selben Wahrheitswerte annehmen:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
W	W	W	F	F
W	F	F	W	W
F	W	F	W	W
F	F	F	W	W

1.2 Mengen und Quantoren

Weitere wichtige Bausteine zur Formulierung mathematischer Aussagen sind Mengen und Quantoren. Wir haben diese Strukturen implizit schon verwendet, z.B. in der Formulierung „Für jede natürliche Zahl n “.

Mathematische Objekte werden seit geraumer Zeit in der Sprache der Mengenlehre formuliert. Georg Cantor hat im Jahre 1895 den Begriff einer Menge so definiert:

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Elemente. Die „Objekte“, aus denen sich eine Menge zusammensetzt, heißen **Elemente** der Menge. Ist M eine Menge, so schreiben wir

$$x \in M, \quad \text{und sagen „}x \text{ ist Element von } M\text{“,}$$

falls x ein Element in der Menge M ist, andernfalls

$$x \notin M, \quad \text{und sagen „}x \text{ ist nicht Element von } M\text{“}.$$

Mit $|A|$ bezeichnen wir die Mächtigkeit einer Menge A , d.h. die Anzahl der Elemente einer Menge. Beispiel: $|\{1, 10, 3\}| = 3$.

Quantoren. In den bisherigen Ausführungen haben wir häufig folgende Formulierungen benutzt: „Für alle Elemente der Menge gilt ...“ oder „es existiert ein Element in der Menge, so dass ...“. Diese Formulierungen können mit Hilfe der Quantoren abgekürzt werden. Hierbei bezeichnet $\exists$ den **Existenzquantor** und $\forall$ den **Allquantor**. Die (wahre) Aussage

$$(1.4) \quad \text{„Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als 1000 ist.“}$$

können wir kürzer so schreiben:

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 1000,$$

oder noch kürzer auch so

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > 1000.$$

Die Anfangs besprochene Aussage (1.1c)

$$\text{„Jede durch 6 teilbare natürliche Zahl ist auch durch 3 teilbar.“}$$

können wir so formulieren

$$\forall n \in \mathbb{N} : 6|n \Rightarrow 3|n,$$

wobei $m|n$ eine Abkürzung für „ m teilt n “ ist.

Die obigen Aussagen haben sind von der allgemeinen Form:

$$\mathbf{Q} x \in X : A(x),$$

wobei Q für den Existenz- oder Allquantor steht, X eine Menge und $A(x)$ eine Aussagenform bezeichnet. Bei Negation gehen $\exists$ und $\forall$ ineinander über:

$$\neg(\exists x \in X : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg A(x),$$

sowie

$$\neg(\forall x \in X : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : \neg A(x).$$

Beispiele 1.3.

- Die Negation von (1.4) ist die (falsche) Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 1000.$$

Beispiele für eine nicht richtige Bildung der Negation von (1.4) sind

$$\exists n \in \mathbb{N} : n \leq 1000, \quad \text{oder auch} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n > 1000.$$

- Auf die Reihenfolge (bei unterschiedlichen Quantoren) kommt es an: Die Aussage: „Für jede natürliche Zahl m finden wir eine natürliche Zahl n die größer als m ist“, also

$$(1.5) \quad \forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : n > m$$

ist wahr, während die Aussage

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : n > m$$

offensichtlich falsch ist, denn wäre diese Aussage wahr, dann würde aus ihr $n > n$ folgen. Die Negation der Aussage (1.5) ist übrigens die (falsche) Aussage

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \leq m.$$

Das sieht man, indem man zunächst bemerkt, dass man (1.5) äquivalent so aufschreiben kann:

$$\forall m \in \mathbb{N} : A(m),$$

wobei $A(m)$ die Aussage $\exists n \in \mathbb{N} : n > m$ bezeichnet. Als nächstes negieren wir die äußere und innere Aussage:

$$\begin{aligned} \neg(1.5) &\Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{N} : \neg A(m)), \\ \neg A(m) &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : n \leq m). \end{aligned}$$

Mit „es gibt ein“ ist in der Mathematik immer gemeint „es gibt mindestens ein“. Will man ausdrücken, dass es auch nicht mehr als eins geben kann, sagt man „es gibt genau ein“ und schreibt $\exists!$.

Wie kann man Mengen angeben? Mengen kann man durch Aufzählung der Elemente definieren, zum Beispiel

$$\{1, 2, 3, 100, 4\}, \quad \{\text{rot, grün, 5, Willersbau}\}.$$

Besteht die Menge aus vielen Elementen, setzt man auch Punkte ein, etwa

$$\{1, 2, 3, \dots, 100\}.$$

Hier unterstellen wir, dass „klar ist, was gemeint ist“. Auch bei Mengen mit unendlich vielen Elementen verfährt man so:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} && \text{Menge der natürlichen Zahlen} \\ \mathbb{N}_+ &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{Menge der natürlichen, positiven Zahlen} \\ \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} && \text{Menge der ganzen Zahlen} \\ &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \end{aligned}$$

Eine Menge kann man auch durch Bildung von **Teilmengen** bekannter Mengen bilden:

Eine Menge N heißt **Teilmenge** einer Menge M , geschrieben $N \subseteq M$, falls jedes Element in N in M enthalten ist. In diesem Fall nennt man M auch **Obermenge** von N , geschrieben $M \supseteq N$.

Beispiele:

$$\{1, 2, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 6\}, \quad \{0, 2, 4, 6, \dots\} \subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}_+, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Teilmengen kann man angeben, indem man eine sie **definierende Eigenschaft** formuliert. Beispiel: Durch

$$N := \{n : n \in \mathbb{N}, \text{ es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2m\}$$

wird eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert – die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Eine solche Beschreibung hat die allgemeine Form

$$N := \{x : x \in M, A(x) \text{ ist wahr}\},$$

wobei M die Obermenge, x eine Variable und $A(x)$ eine Aussagenform bezeichnet. Alternativ schreiben wir etwas kürzer

$$N := \{x \in M : A(x)\}.$$

Ebenso ist die Schreibweise

$$N := \{x \in M \mid A(x)\}$$

gebräuchlich.

Zwei Mengen M, N heißen **gleich**, geschrieben $M = N$, falls sowohl $N \subseteq M$ als auch $M \subseteq N$ gilt. Andernfalls nennen wir die Mengen **ungleich** und schreiben $M \neq N$.

Wir sehen: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

Eine Menge N heißt **echte Teilmenge** einer Menge M , geschrieben $N \subsetneq M$, falls $N \subseteq M$ und $N \neq M$. Wir definieren **echte Obermenge** analog.⁸

15.10.2019

21.10.2019

Beispiele 1.4.

- $\{1, 3, 5, 7\} = \{1, 7, 3, 5\} \subsetneq \mathbb{N}$.

Auf die Reihenfolge bei der Aufzählung kommt es nicht an.

- Sei M eine Menge. Wir betrachten Teilmengen N, O der Form

$$N = \{x : x \in M, A(x) \text{ ist wahr}\}, \quad O = \{x : x \in M, B(x) \text{ ist wahr}\}.$$

Dann gilt

$$(1.6) \quad N = O$$

genau dann, wenn

$$(1.7) \quad A(x) \Leftrightarrow B(x) \text{ für alle } x \in M.$$

Wir beweisen hier nur, dass die Aussage (1.7) die Aussage (1.6) impliziert. Es gelte (1.7). Wir müssen zeigen, dass $N \subseteq O$ und $O \subseteq N$ gelten. Wir beginnen mit dem Argument für $N \subseteq O$. Sei $x \in N$. Dann gilt $A(x)$. Wegen $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ gilt auch $B(x)$. Also $x \in O$. Wir haben $N \subseteq O$ gezeigt. Durch vertauschen der Rollen von N und O sowie $A(x)$ und $B(x)$ folgt mit dem gleichen Argument die Inklusion $O \subseteq N$. $\square$

Es gilt auch

$$\{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7, 3\}.$$

Im rechtsstehenden Ausdruck taucht 3 zweimal auf. Damit ist nicht gemeint, dass die Menge zweimal die 3 enthält, denn alle Elemente müssen „wohlunterschieden“ (Cantor) sein und das muss auch in ihrer Bezeichnung zum Ausdruck kommen. Die zweite 3 in $\{1, 3, 5, 7, 3\}$ ist überflüssig und die Menge besteht nur aus 4 Elementen! Es ist manchmal praktisch, Mehrfachnennungen bei der Definition einer Menge zu erlauben. Beispiel: Beschreibt man die Menge aber anders als durch explizite Aufzählung, kann eine solche Situation schon auftreten. Durch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

wird die Menge der rationalen Zahlen beschrieben. Als Ergebnis von „ $\frac{p}{q}$ “ tauchen alle rationalen Zahlen mehrfach (sogar unendlich oft) auf. Die Zahl 3 kommt beispielsweise nicht nur als $\frac{3}{1}$ sondern auch als $\frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{-3}{-1}, \dots$ in der Aufzählung vor.

⁸In mathematischen Schriften findet man häufig die Notation $A \subset B$. Diese Notation wird nicht einheitlich verwendet! Sie kann sowohl für „ist Teilmenge“ oder „ist echte Teilmenge“ stehen.

Leere Menge. Es kann passieren, dass eine Beschreibung einer Menge dazu führt, dass sie leer ist. Beispiel:

$$\{n : n \in \mathbb{N}, n = n + 1\}$$

Wir bezeichnen mit $\emptyset$ die **leere Menge**, also die Menge die keine Elemente enthält. Die leere Menge besitzt die Mächtigkeit $|\emptyset| = 0$. Es gilt

- Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.
- Aus $N \subseteq \emptyset$ folgt $N = \emptyset$.
- Aus $N \neq \emptyset$ folgt, dass (mindestens) ein $x \in N$ existiert.
- Es gibt keine Menge N mit $N \subsetneq \emptyset$. Argument: Sei $N \subseteq \emptyset$. Da immer $\emptyset \subseteq N$ gilt folgt $N = \emptyset$. Aber damit kann nicht $N \subsetneq \emptyset$ gelten.
- Für eine beliebige Aussagenform $A(x)$ ist die Aussage

$$\exists x \in \emptyset : A(x)$$

falsch (denn es existiert kein Element, welches eine Aussage erfüllen könnte). Die Negation dieser Aussage ist

$$\forall x \in \emptyset : \neg A(x).$$

Damit sind alle Aussagen der Form $\forall x \in \emptyset : A(x)$ immer wahr. „Aussagen über die Elemente der leeren Menge sind immer wahr“.

Potenzmenge. Die Elemente einer Menge können auch selbst Mengen sein. Beispiele:

- Für $M := \{1, \{2, 3\}\}$ gilt $1 \in M$ und $2 \notin M$.
- Die Elemente von

$$(1.8) \quad P = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

sind alles Teilmengen von $\{0, 1\}$.

Die Menge P ist ein Beispiel für ein **Mengensystem**. In der Tat besteht P sogar aus sämtlichen Teilmengen von $\{0, 1\}$. Solche Mengen haben einen besonderen Namen:

Für eine Menge M bezeichnen wir mit⁹

$$\mathcal{P}(M) := \{N : N \subseteq M\}$$

das Mengensystem aller Teilmengen von M . Wir nennen $\mathcal{P}(M)$ die **Potenzmenge von M** .

Es gelten immer sowohl $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, als auch $M \in \mathcal{P}(M)$.

⁹Eine alternative, häufig verwendete Schreibweise für die Potenzmenge von M ist 2^M .

Geordnetes Paar, Produktmenge. Punkte in der Ebene können wir durch ein Zahlenpaar (x, y) darstellen. Auf die Reihenfolge kommt hierbei es an. Zum Beispiel bezeichnen $(1, 2)$ und $(2, 1)$ zwei verschiedene Punkte. Man nennt (x, y) ein **geordnetes Paar/Tupel**.

Seien M, N Mengen. Wir definieren die **Produktmenge** („das kartesische Produkt“) $M \times N$ durch

$$M \times N := \{ (x, y) : x \in M, y \in N \},$$

also als Menge aller geordneter Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$. Die Mengen M und N nennt man dann **Faktoren** von $M \times N$.

Beispiel 1.5. Aus der Zahlengerade $\mathbb{R}$ erhalten wir die Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und darin $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten.

Mengenoperationen. Im Folgenden bezeichnen M und N zwei beliebige Mengen.

- Die **Vereinigung** von M und N wird mit $M \cup N$ („ M vereinigt mit N “) bezeichnet und ist durch

$$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$$

definiert. $M \cup N$ enthält also genau die Elemente, die in M oder N enthalten sind.

- Der **Durchschnitt** von M und N wird mit $M \cap N$ („ M geschnitten mit N “) bezeichnet und ist durch

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$$

definiert. $M \cap N$ enthält also genau die Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

- Die **Differenz** wird mit $M \setminus N$ („ M ohne N “) bezeichnet und ist durch

$$M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$$

definiert. $M \setminus N$ enthält also genau die Elemente in M , die nicht in N enthalten sind.

- Die **symmetrische Differenz** wird mit $M \triangle N$ bezeichnet und ist durch

$$M \triangle N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$

definiert. $M \triangle N$ enthält genau die Elemente, die in genau einer der Mengen M und N enthalten sind.

Beispiele 1.6.

$$X := \{x : x \text{ ist Teilnehmer/in dieser Vorlesung.}\},$$

$$M := \{x : x \in X, x \text{ studiert in einem Bachelorstudiengang.}\},$$

$$M_1 := \{x : x \in X, x \text{ studiert Bachelor Mathematik oder Wirtschaftsmathematik.}\}$$

$$M_2 := \{x : x \in X, x \text{ studiert Bachelor Physik.}\}$$

$$L := \{x : x \in X, x \text{ ist Lehramtsstudent/in Gymnasium oder Berufsbildende Schulen.}\}$$

- Für die Studierenden in $L \cup M_1 \cup M_2$ ist diese Vorlesung eine Pflichtveranstaltung.
- $M \setminus M_1$ = Die Bachelorstudenten in dieser Vorlesung, die nicht im mathematischen Bachelorstudiengang studieren. Diese Menge enthält insbesondere die Physiker, also $M_2 \subseteq M \setminus M_1$.
- Die Menge $(M \setminus M_1) \setminus M_2 = M \setminus (M_1 \cup M_2)$ enthält besonders engagierte Studierende, nämlich Studierende im Bachelor, die weder Mathematik, Wirtschaftsmathematik noch Physik studieren und damit diese Vorlesung freiwillig belegen. Sie bilden eine Teilmenge von $X \setminus (L \cup M_1 \cup M_2)$ – der Menge aller Studierende, für diese Veranstaltung nicht verpflichtend ist.
- Sollten Sie der Meinung sein, dass Sie der Menge $(X \setminus M_1) \cap M_1$ angehören, dann lesen Sie bitte nochmal in Ruhe die Definition der Mengenoperationen durch.

Sind alle Mengen, die betrachtet werden, Teilmenge einer gemeinsamen Menge X , so bezeichnen wir mit $M^c := X \setminus M$ das **Komplement** von M (in X).¹⁰

Satz 1.7 (Morgan'sche Regeln für Mengen). Seien $M, N \subseteq X$ Mengen. Dann gilt

$$(M \cup N)^c = M^c \cap N^c \quad \text{und} \quad (M \cap N)^c = M^c \cup N^c.$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung. Die zweite wird eine Übungsaufgabe sein. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $A(x)$ die Aussage $x \in M$ und mit $B(x)$ die Aussage $x \in N$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

$$M^c = \{x : x \in X, \neg A(x)\},$$

$$N^c = \{x : x \in X, \neg B(x)\},$$

$$M^c \cap N^c = \{x : x \in X, (\neg A(x)) \wedge (\neg B(x))\},$$

$$M \cup N = \{x : x \in X, A(x) \vee B(x)\},$$

$$(M \cup N)^c = \{x : x \in X, (A(x) \vee B(x)) = \text{falsch},\} = \{x : x \in X, \neg(A(x) \vee B(x))\}.$$

Nun gilt (und das ist genau Aufgabe 2 d)

$$\neg(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\neg A(x)) \wedge (\neg B(x)),$$

also sind die Bedingungen in der Definition der Mengen $M^c \cap N^c$ und $(M \cup N)^c$ äquivalent und damit die Mengen gleich. $\square$

Vereinigung und Durchschnitt beliebiger Mengen. Sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem, d.h. eine Menge deren Elemente wieder Mengen sind. Wir definieren die Vereinigung von $\mathcal{M}$ durch

$$\bigcup \mathcal{M} = \bigcup \{M : M \in \mathcal{M}\} = \{x : \exists M \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in M\}.$$

Für ein nicht leeres Mengensystem $\mathcal{M}$ definieren wir den Durchschnitt von $\mathcal{M}$ durch

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap \{M : M \in \mathcal{M}\} = \{x : \forall M \in \mathcal{M} \text{ gilt } x \in M\}.$$

Beispiel: Seien A, B Mengen, $\mathcal{M} = \{A, B\}$. Dann:

$$\bigcup \mathcal{M} = A \cup B, \quad \bigcap \mathcal{M} = A \cap B.$$

¹⁰In der Literatur wird häufig auch die Schreibweise $\overline{M}$ statt M^c verwendet.

1.3 Beweisschemata

Es gibt verschiedene Schemata um zu beweisen, dass $A \Rightarrow B$ gilt.

- Den **direkten Beweis** haben wir bereits kennengelernt: Man beweist $A \Rightarrow B$, indem man diese Implikation in endlich viele Zwischenschritte zerlegt, d.h. man findet Aussagen $C_1, \dots, C_n$, so dass

$$A \Rightarrow C_1, \quad C_1 \Rightarrow C_2, \quad C_2 \Rightarrow C_3, \quad \dots \quad C_n \Rightarrow B.$$

Dass dies $A \Rightarrow B$ impliziert, folgt aus Aufgabe 2f.

- **Beweis durch Kontraposition.** Hier beweist man (direkt) die Aussage $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$. Letztere ist äquivalent zur Aussage $A \Rightarrow B$ (siehe Aufgabe 2e).
- **Widerspruchsbeweis (oder Indirekter Beweis).** Hier nimmt man an, dass sowohl A als auch $\neg B$ gelten und folgert einen Widerspruch, d.h. man zeigt dass eine weitere Aussage C gleichzeitig wahr und falsch ist. Warum folgt hieraus, dass $A \Rightarrow B$ wahr ist?

Formal zeigt man beim Widerspruchsbeweis, dass für eine weitere Aussage C die Implikation

$$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$$

gilt. Die Aussage $C \wedge \neg C$ ist aber immer falsch (Aufgabe 2c), und damit muss auch $A \wedge \neg B$ falsch sein. Nun stellt man aber fest, dass $A \Rightarrow B$ äquivalent zur Negation von $A \wedge \neg B$ ist. Also ist $A \Rightarrow B$ wahr.

- **Beweis durch Beispiel.** Aussagen der Form “ $\exists x \in M : A(x)$ ” kann man beweisen, indem man ein Beispiel angibt.
- **Beweis durch vollständige Induktion.** Das werden wir später erklären.

21.10.2019

22.10.2019

1.4 Indizes und Summenzeichen

Zur Motivation betrachten wir die Summe der ersten sieben Quadratzahlen

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2.$$

Verwendet man Auslassungspunkte, sieht das so aus

$$s = 1^2 + 2^2 + \dots + 7^2.$$

Eine in der Mathematik gebräuchliche Schreibweise hierfür benutzt das Summen-Zeichen Σ :

$$(1.9) \quad s = \sum_{k=1}^7 k^2.$$

Dieser Ausdruck bedeutet, dass der hinter dem Summen-Zeichen stehende Ausdruck für jede ganze Zahl k mit $1 \leq k \leq 7$ ausgewertet wird und die Ergebnisse aufsummiert werden.

In (1.9) kommt eine **Variable** k vor. Der Wert von s hängt nicht vom Namen der Variablen ab. Beispielsweise liefert $s = \sum_{\ell=1}^7 \ell^2$ dasselbe Ergebnis. Wir können auch die **Summationsgrenzen** (hier die Zahlen 1 und 7) durch Variablen ersetzen:

$$(1.10) \quad s = \sum_{k=m}^n k^2.$$

Der Wert von s hängt also von den Werten von m und n ab. Beispielsweise erhalten wir für dann $m = 2$ und $n = 4$, $s = 4 + 9 + 16 = 29$.

Häufig möchte man sich noch nicht festlegen, welche Zahlen man addiert. Möchte man z.B. allgemeine Summen von sieben ganzen Zahlen betrachten, dann könnte man schreiben: Seien $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ und

$$s = a + b + c + d + e.$$

Besser und übersichtlicher ist es, mit **Indizes** zu arbeiten: Anstatt mit unterschiedlichen Buchstaben bezeichnen wir die sieben Variablen mit

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_7,$$

also mit a_k wobei der **Index** k aus der **Indexmenge** $K = \{1, \dots, 7\}$ kommt. Man nennt dann $\{a_k\}_{k \in K}$ (oder einfach a) eine “mit k indizierte Variable”. In Verbindung mit dem Summenzeichen können wir dann Ausdrücke der Form $\sum_{k=1}^5 a_k$ oder auch

$$s = \sum_{\ell=m}^n b_\ell$$

bilden. Falls $m > n$ (und damit kein ℓ mit $m \leq \ell$ und $\ell \leq n$ existiert), dann nennt man die resultierende Summe die **leere Summe**. Wir definieren ihren Wert als 0.

Formeln dieser Bauart treten in der Mathematik und insbesondere in der Analysis ständig auf. Es ist hilfreich, sich sehr schnell mit solchen Ausdrücken und deren Manipulation vertraut zu machen.

Beispiele 1.8 (Rechnen mit dem Summenzeichen).¹¹

- **Aufspalten von Summen.** Für einen beliebigen Index k mit $m \leq k \leq n$ gilt

$$\sum_{\ell=m}^n a_\ell = \sum_{\ell=m}^k a_\ell + \sum_{\ell=k+1}^n a_\ell.$$

¹¹Für die nachfolgenden Rechenregeln wird benutzt, dass die Addition kommutativ und assoziativ ist! Betrachtet man Summen in allgemeinen Gruppen (siehe Lineare Algebra), so müssen diese Rechenregeln nicht gelten. Wir werden diese Rechenregeln später, wenn wir die reellen Zahlen axiomatisch eingeführt und das Prinzip der vollständigen Induktion kennen, nochmals genauer ansehen und beweisen. Beachten Sie, dass hier nur Summen von endlich vielen Elementen stehen - die Frage welche Rechenregeln für Summen mit *unendlich* vielen Termen gelten werden wir im Kapitel über *Reihen* untersuchen!

- **Indexverschiebung.** Es gilt für beliebig (aber fest) gewähltes k

$$\sum_{\ell=m+k}^{n+k} a_{\ell} = \sum_{\ell=m}^n a_{\ell+k}.$$

- **Addition von Summen.** Stimmen die Summationsgrenzen überein, so kann man die Summe zweier Summen zusammenfassen:

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{\ell=m}^n b_{\ell} = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k).$$

- **Teleskopsumme.** Man kann zeigen (Hausaufgabe)

$$\sum_{\ell=m}^n (a_{\ell} - a_{\ell-1}) = a_n - a_{m-1}.$$

Beweis. (Blatt 2 Aufgabe 5) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=m}^n a_k - \sum_{j=m}^n a_{j-1} \stackrel{j-1=k, j=k+1}{=} \sum_{k=m}^n a_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} a_k \\ &= \left(a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k \right) - \left(a_{m-1} + \sum_{k=m}^{n-1} a_k \right) = a_n - a_{m-1}. \end{aligned}$$

□

Ganz analog kann man Produkte mit mehreren Faktoren bezeichnen. Statt des Summenzeichens verwendet man hierzu das Produktzeichen $\prod$. Man schreibt beispielsweise

$$\prod_{\ell=1}^5 \ell = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

Der obige Ausdruck hat sogar eine eigene Bezeichnung, nämlich $5!$ ("5 Fakultät"). Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät von n definiert durch

$$n! = \prod_{\ell=1}^n \ell.$$

Im Fall $n = 0$ erhält man das **leere Produkt**, dessen Wert wir mit 1 definieren, d.h. es gilt $0! = 1$.

1.5 Funktion

Aus der Schule kennen wir bereits Funktionen, z.B. die Quadratfunktion

$$f(x) = x^2,$$

die jeder gegebenen Zahl x ihr Quadrat x^2 zuordnet, oder auch

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

die jeder von null verschiedenen Zahl x ihren reziproken Wert zuordnet.

Eine mathematische **Funktion** (oder auch **Abbildung**) hat nun mehrere Bestandteile, die sich alle in der Notation

$$(1.11) \quad f : M \rightarrow N$$

wiederfinden:

- M ist eine Menge, **Definitionsbereich** genannt,
- N ist eine Menge, **Zielbereich** (oder auch **Wertebereich**) genannt,
- $\rightarrow$ symbolisiert die **Funktionsvorschrift** (oder auch **Abbildungsvorschrift**)
- f ist der Name der Funktion.

Eine **Funktionsvorschrift** muss folgende Eigenschaft haben:

$$(1.12) \quad \text{Jedem } x \in M \text{ wird genau ein Element von } N \text{ zugeordnet.}$$

Das einem $x \in M$ zugeordnete Element von N wird mit $f(x)$ bezeichnet. $f(x)$ wird auch das **Bild von x unter f** oder der **Wert von f an der Stelle x** genannt.

Die Bildmenge einer Funktion f ist die Menge

$$\text{Bild}(f) := \{ y : y \in N, \exists x \in M \text{ mit } y = f(x) \} = \{ f(x) : x \in M \},$$

und ist eine Teilmenge von N . Sie besteht aus allen Werten in N , die tatsächlich angenommen werden.

Es gibt viele Möglichkeiten eine Funktionsvorschrift anzugeben. Hier ein paar Beispiele:

- in Worten, z.B.: Jeder Zahl x wird ihr Quadrat zugeordnet.
- explizit: $f(x) = x^2$. Falls man den Namen der Funktion nicht festlegen möchte kann die Schreibweise $x \mapsto x^2$ verwendet werden. Achtung: Die Pfeile $\mapsto$ und $\rightarrow$ unterscheiden sich in Aussehen und Bedeutung.
- implizit: Wir bezeichnen mit $f(x)$ die nicht-negative Lösung der Gleichung $y^2 = x^4$. (Hier muss man natürlich zunächst überprüfen, dass (1.12) erfüllt ist. Lassen wir bei diesem Beispiel die Eigenschaft "nicht-negativ" weg, dann wird durch diesen Ausdruck keine Funktion definiert).

Die Funktionsvorschrift allein genügt jedoch nicht, es müssen immer auch Definitions- und Wertebereich spezifiziert werden. Insbesondere nennen wir zwei Funktion $f_1 : M_1 \rightarrow N_1$ und $f_2 : M_2 \rightarrow N_2$ **gleich**, falls $M_1 = M_2$ und $N_1 = N_2$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in M_1$ gilt. Wir schreiben dann $f_1 \equiv f_2$.

Beispiele 1.9.

- Mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^2$ können wir beispielsweise die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

definieren. Unzulässig wäre jedoch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, da beispielsweise das Bild von $x = \frac{1}{2}$ unter der Abbildungsvorschrift $x \mapsto x^2$ durch $\frac{1}{4}$ gegeben ist, was keine natürliche Zahl ist.

- Durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = y \text{ mit } y^2 = |x|$$

wird keine Funktion definiert, da beispielsweise für $x = 1$ die zwei Werte $y_{1,2} = \pm 1$ in Frage kämen.

- Die Funktionsvorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ wird zusammen mit dem Definitionsbereich $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ und dem Wertebereich $\mathbb{R}$ zu einer Funktion.
- In Funktionsvorschriften können Fallunterscheidungen vorkommen. Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Hierbei muss auf die Abgrenzung der Fälle geachtet werden. So definiert der Ausdruck

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -1, & x \leq 0, \end{cases}$$

keine Funktion, da für $x = 0$ zwei Werte in Frage kommen. Andererseits wird durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

eine Funktion definiert, da für $x = 0$ in beiden Fällen der Wert 0 resultiert.

Bemerkung 1.10 (Zum Sprachgebrauch). Mit “ f ” bezeichnen wir die Funktion und mit “ $f(x)$ ” den Wert der Funktion an der Stelle x . Innerhalb der Mathematik ist das der allgemein akzeptierte Standard. Die Sinusfunktion heißt dann “ $\sin$ ”, der Wert der Sinusfunktion an der Stelle x heißt “ $\sin(x)$ ” oder “ $\sin x$ ”. Der Vorteil dieser Sprachregelung ist, dass man zweifelsfrei weiß, ob die Funktion oder der Funktionswert gemeint ist. In anderen Fächern ist der Sprachgebrauch oft anders. Wenn dort von “ $\sin x$ ” gesprochen wird, muss man u.U. dem Zusammenhang entnehmen, ob die Funktion oder der Funktionswert gemeint ist. Zwischenformen, die auch in der Mathematik vorkommen, können sein:

“Die Funktion $(4x + 3)^2$ hat die Eigenschaft...” oder “Die Funktion $f(x) = (4x + 3)^2$ hat die Eigenschaft...” anstatt der präzisen Formulierungen “Die durch $x \mapsto (4x + 3)^2$ definierte Funktion hat die Eigenschaft ...” und “Die durch $f(x) = (4x + 3)^2$ definierte Funktion hat die Eigenschaft ...”.

Insbesondere zu Beginn des Studiums sollten Sie ausschließlich präzise Formulierungen verwenden, denn nur so können Sie die wichtigen Unterschiede in der Bedeutung der Formulierungen erlernen.

Wir führen noch ein paar Begriffe ein. Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion.

- Der **Graph** von f ist durch die Menge

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in M \times N : x \in M\}$$

definiert. $\text{Graph}(f)$ ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$. Im Fall $M = N = \mathbb{R}$ können wir uns $\text{Graph}(f)$ als den Funktionsgraphen, wie aus der Schule bekannt, vorstellen.

- Für eine Teilmenge $X \subseteq M$ definieren wir die **Bildmenge** (oder einfach **Bild**) von X unter f als die Menge

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}.$$

Das ist eine Teilmenge des Wertebereichs.

- Wir definieren für eine Teilmenge $Y \subseteq N$ die **Urbildmenge** (oder einfach **Urbild**) von Y unter f als die Menge

$$f^{-1}(Y) := \{x : x \in M, f(x) \in Y\}.$$

Das ist eine Teilmenge des Definitionsbereichs. Ist $y \in N$, so nennen wir jedes $x \in M$ mit $f(x) = y$ ein **Urbild** von y .

- Wir nennen die Funktion f
 - **surjektiv**, wenn $\text{Bild}(f) = N$.
 - **injektiv**, wenn jedes $y \in N$ höchstens ein Urbild hat.
 - **bijektiv**, wenn f **injektiv** und **surjektiv** ist.

1.6 Relation

Wir werden nun den Begriff der Relation einführen. Das ist vermutlich die erste mathematische Struktur, die Sie noch nicht aus der Schule kennen. Wir werden daher die Darstellung etwas formaler gestalten.

Definition 1.11 (Relation). Sei M eine Menge. Eine **Relation** auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Falls $(x, y) \in R$, so sagen wir “ x **steht in Relation zu** y ” und schreiben $x \sim_R y$ (alternativ: $R(x, y)$ oder einfach $x \sim y$).

Eine Relation R auf M heißt

- **reflexiv**, falls $x \sim_R x$ für alle $x \in M$,
- **symmetrisch**, falls $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$ für alle $x, y \in M$,
- **antisymmetrisch**, falls $(x \sim_R y) \wedge (y \sim_R x) \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in M$,
- **transitiv**, falls $(x \sim_R y) \wedge (y \sim_R z) \Rightarrow x \sim_R z$ für alle $x, z, y \in M$.

Mit Relationen werden Sie sich ausführlich in der Vorlesung Lineare Algebra beschäftigen. Auch in der Analysis werden wir diese Struktur verwenden.

Beispiele 1.12. (a) (Funktionsgraph). Ist $f : M \rightarrow M$ eine Funktion, so wird durch $R = \text{Graph}(f)$ eine Relation auf M definiert. Dann steht $x \in M$ in Relation mit $y \in M$ genau dann, wenn $f(x) = y$ gilt. Man kann auf diese Weise den Begriff der Funktion in den allgemeineren Begriff der Relation einbetten.

R ist reflexiv genau dann, wenn f die Identitätsabbildung $f : M \rightarrow M, x \mapsto x$ ist.

(b) Sei M die Menge aller Teilnehmer dieser Vorlesung. Wir betrachten die Relationen

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{(x, y) \in M \times M : x \text{ und } y \text{ kennen sich}\}, \\ R_2 &:= \{(x, y) \in M \times M : x \text{ hat } y \text{ gesehen}\}. \end{aligned}$$

R_1 ist reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv.

R_2 ist reflexiv, nicht symmetrisch und nicht transitiv.

(c) Sei M eine Menge, $R := \{(x, x) : x \in M\}$. Es gilt also $x \sim_R y$ genau dann, wenn $x = y$. Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch, **antisymmetrisch** und transitiv.

(d) Betrachte $\mathbb{Z}$ mit $R := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x \leq y\}$. Diese Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Eine wichtige Rolle spielen die Äquivalenzrelationen und die Ordnungsrelation:

Definition 1.13 (Äquivalenz- und Ordnungsrelation). Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M heißt,

- **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- **Ordnungsrelation**, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Ist R eine Ordnungsrelation so schreiben wir $x \preceq y$ statt $x \sim_R y$ (und sagen “ x ist kleiner (gleich) als y ”).

Bemerkung: Für viele Relationen gibt es spezielle Symbole, die anstatt des Buchstabens R verwendet werden, z.B.: $=$, $<$, $\leq$, $\subseteq$,...

Definition 1.14 ((total) geordnete Menge). Ist M eine Menge und $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf M , so nennt man $(M, \preceq)$ eine **geordnete Menge**. Eine geordnete Menge heißt **total geordnet**, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

22.10.2019

28.10.2019

Beispiele 1.15.

- $(M, =)$ (die Relation aus Beispiel 1.12 (c)) ist **Äquivalenz- und Ordnungsrelation**.
- $(\mathbb{Z}, \leq)$ (die Relation aus Beispiel 1.12 (d)) ist eine total geordnete Menge.
- $(\mathbb{Z}, <)$ ist hingegen keine geordnete Menge: Die Relation $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x < y\}$ ist **transitiv, antisymmetrisch aber nicht reflexiv und symmetrisch**.
- $(\mathbb{N}, |)$ (mit $x|y$ bedeutet x teilt y) ist eine geordnete Menge, aber nicht total geordnet. Siehe Übung.
- Ist A eine Menge, dann ist $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ eine geordnete Menge. Sie ist im allgemeinen nicht total geordnet. Setzen wir beispielsweise $A = \mathbb{N}$ und betrachten die Teilmengen $N_1 = \{1, 2\}$ und $N_2 = \{2, 3\}$, dann gilt weder $N_1 \subseteq N_2$ noch $N_2 \subseteq N_1$.

Definition 1.16 (Minimale, maximale, größte und kleinste Elemente). Sei $(M, \preceq)$ eine geordnete Menge. Ein Element $m \in M$ heißt

- **maximal** in M , falls gilt

$$m \preceq x \Rightarrow m = x \quad \text{für alle } x \in M.$$

- **minimal** in M , falls gilt

$$x \preceq m \Rightarrow m = x \quad \text{für alle } x \in M.$$

- **größtes** Element in M , falls gilt

$$\forall x \in M : x \preceq m.$$

- **kleinstes** Element in M , falls gilt

$$\forall x \in M : m \preceq x.$$

Minimale und maximale Elemente müssen weder existieren noch eindeutig sein! Auch größte (kleinste) Elemente müssen nicht existieren. Falls Sie aber existieren, dann sind sie eindeutig.

Lemma 1.17 (Eindeutigkeit größter (bzw. kleinster) Elemente). Sei $(M, \preceq)$ eine geordnete Menge. Dann gibt es höchstens ein größtes (resp. kleinstes) Element.

Beweis. Schritt 1: Beweis der Eindeutigkeit eines größten Elementes.

Wir müssen zeigen, dass die Menge

$$A = \{m : m \in M, m \text{ ist größtes Element}\}$$

aus höchstens einem Element besteht. Es gibt zwei Fälle:

- Im Fall $A = \emptyset$ folgt die Behauptung direkt.

- Im Fall $A \neq \emptyset$ existiert ein $a \in A$, und es gilt $A \subseteq \{a\}$. Letzteres sieht man wie folgt: Sei $m \in A$. Dann ist m ein größtes Element, also $a \preceq m$. Da auch a ein größtes Element ist, folgt $m \preceq a$. Aus der Antisymmetrie folgt nun $m = a$, also $m \in \{a\}$.

Schritt 2: Beweis der Eindeutigkeit eines kleinsten Elementes.

Der Beweis erfolgt analog: Wir zeigen, dass die Menge

$$A = \{m : m \in M, m \text{ ist kleinstes Element}\}$$

aus höchstens einem Element besteht. Falls $A = \emptyset$ ist nichts zu tun. Im Fall $A \neq \emptyset$ existiert ein $a \in A$, und es gilt $A \subseteq \{a\}$. Letzteres sieht man wie folgt: Sei $m \in A$. Dann ist m ein kleinstes Element, also $m \preceq a$. Da auch a ein kleinstes Element ist, folgt $a \preceq m$. Aus der Antisymmetrie folgt nun $m = a$, also $m \in \{a\}$. $\square$

Minimale (maximale) Elemente sind nicht dasselbe wie kleinste (größte) Elemente. Ein Unterschied ist beispielsweise, dass ein größtes (kleinstes) Element immer in Relation zu allen anderen Elementen stehen muss. In total geordneten Mengen ist diese zusätzliche Bedingung immer erfüllt. Es gilt:

Lemma 1.18. *Sei $(M, \preceq)$ eine total geordnete Menge. Dann gilt für alle $m \in M$,*

$$m \text{ ist maximal} \Leftrightarrow m \text{ ist größtes Element},$$

sowie

$$m \text{ ist minimal} \Leftrightarrow m \text{ is kleinstes Element}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussagen nur für das maximale, denn das Argument für das minimale Element erfolgt analog.

Schritt 1: Argument für “ $\Rightarrow$ ”.

Sei m maximal. Zu zeigen: Für alle $x \in M$ gilt $x \preceq m$. Sei also $x \in M$ beliebig. Da M total geordnet ist, gilt entweder $x \preceq m$ oder $m \preceq x$. Im ersten Fall ist nichts weiter zu zeigen. Im zweiten Fall folgt aus der Maximalität von m , dass $m = x$. Aus der Reflexivität folgt nun $x \preceq m$.

Schritt 2: Argument für “ $\Leftarrow$ ”.

Sei m größtes Element. Zu zeigen: Für alle $x \in M$ gilt die Implikation $m \preceq x \Rightarrow m = x$. Sei also $x \in M$ mit $m \preceq x$. Da m größtes Element ist, gilt auch $x \preceq m$. Aus der Antisymmetrie folgt nun $m = x$. $\square$

Wir sehen am Beweis, dass die Richtung “ $\Leftarrow$ ” auch in (nicht unbedingt total) geordneten Mengen gilt.

2 Die reellen Zahlen

Wir können uns die reellen Zahlen (wie gewohnt) als Punkte auf der Zahlengerade vorstellen. So eine Vorstellung ist zwar hilfreich aber nicht ausreichend um mit den reellen Zahlen in der Analysis wirklich formal arbeiten zu können. Hierfür müssen wir uns zunächst klar machen, was für mathematische Objekte die reellen Zahlen sind und durch welche mathematischen Eigenschaften sie charakterisiert werden können.

Es gibt in der Mathematik verschiedene Möglichkeiten diese Fragen zu bearbeiten. Eine besteht darin, die reellen Zahlen aus den natürlichen Zahlen zu konstruieren: Geht man davon aus, dass man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Menge bereits kennt und auch weiß, wie Addition und Multiplikation definiert sind, so lassen sich daraus sukzessive die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ konstruieren. Diesen Konstruktionsprozess zu studieren ist ganz interessant und man kann hierbei grundlegende Konzepte der Mathematik kennenlernen. Andererseits ist er etwas langwierig und für das Verständnis der modernen Analysis nicht so wesentlich.

In dieser Vorlesung gehen wir einen anderen Weg: Wir werden die reellen Zahlen axiomatische einführen – ein Vorgehen, dass auf David Hilbert zurück geht. Hierbei wird angenommen, dass eine Menge $\mathbb{R}$ (die reellen Zahlen) existiert, welche gewisse Eigenschaften erfüllt. Die “gewissen Eigenschaften” werden in Form eines Axiomensystems¹², bestehend aus den Körperaxiomen, Anordnungsaxiomen und dem Supremumsaxiom, formalisiert. Aussagen und Eigenschaften über $\mathbb{R}$ dürfen dann nur aus diesen Axiomen gefolgert werden. Bei diesem Zugang, ergeben sich die natürlichen Zahlen als eine spezielle Teilmenge von $\mathbb{R}$, nämlich als kleinste, induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$. Der weiter oben skizzierte Konstruktionsprozess beweist, dass die Menge $\mathbb{R}$ — deren Existenz im axiomatischen Zugang eine Annahme ist — tatsächlich existiert und (“bis auf Äquivalenz”) eindeutig ist.

2.1 Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

Inhalt/Ziele:

- Körperaxiome, Anordnungsaxiome, (Antizipation des) Supremumsaxiom
- Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

An dieser Stelle wird das gesamte Vorwissen über die reellen Zahlen “vergessen”. Im Nachfolgenden wird eine Menge $\mathbb{R}$ betrachtet, die später als die Menge der reellen Zahlen bezeichnet wird.

Axiom 2.1 (Körperaxiome). $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bestehend aus der Menge $\mathbb{R}$ mit den Abbildungen $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ (Addition) und $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ (Multiplikation)

¹²Axiome sind mathematische Aussagen, die wir – ohne mathematische Begründung – als wahr festlegen.

ist ein kommutativer Körper, d.h. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(K1)

(Kommutativgesetz). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + y = y + x \quad \text{und} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

(K2)

(Assoziativgesetz). Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{und} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(K3)

(Existenz der Neutralelemente). Es existieren $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 0 = x \quad \text{und} \quad 1 \cdot x = x.$$

(K4)

(Existenz inverser Elemente)¹³. Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert $(-x) \in \mathbb{R}$ mit

$$x + (-x) = 0.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert $(x^{-1}) \in \mathbb{R}$ mit

$$x \cdot (x^{-1}) = 1.$$

(K5)

(Distributivgesetz). Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Axiom 2.2 (Anordnungsaxiome). $(\mathbb{R}, +, \cdot, P)$ bestehend aus einem kommutativer Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und einer Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ (genannt Positivbereich) besitzt folgende Eigenschaften:

(O1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt **genau** eine der folgenden Aussagen (**Trichotomie**):

$$x \in P, \quad x = 0, \quad (-x) \in P.$$

(O2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

Definition (Kleiner-Größer-Gleich-Relationen): Mit Hilfe von P führen wir folgende Relationen auf $\mathbb{R}$ ein:

$$\begin{aligned} x > y &: \Leftrightarrow : x - y \in P && \text{(echt) größer} \\ x \geq y &: \Leftrightarrow : x > y \vee x = y && \text{größer(-gleich)} \\ x < y &: \Leftrightarrow : y - x \in P && \text{(echt) kleiner} \\ x \leq y &: \Leftrightarrow : x < y \vee x = y && \text{kleiner(-gleich)}. \end{aligned}$$

Es wird später gezeigt werden, dass $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \geq)$ total geordnete Mengen sind. Das Supremumsaxiom, Axiom 2.34, werden wir später einführen. Wir führen nun die reellen Zahlen axiomatisch ein:

¹³Wir schreiben hier $(-x)$ und (x^{-1}) um hervorzuheben, dass die Symbole “ $-$ ” und “ -1 ” an dieser Stelle noch keinerlei eigenständige Bedeutung haben. Später werden wir einfach $-x$ oder x^{-1} bzw. $\frac{1}{x}$ schreiben.

Axiomensystem 2.3 (Axiomensystem der reellen Zahlen). *Es existieren*

- eine Menge $\mathbb{R}$,
- Rechenoperationen $+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$,
- und eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, P)$ die Körperaxiome (Axiom 2.1), die Anordnungsaxiome (Axiom 2.2) und das Supremumsaxiom (Axiom 2.34) erfüllt.

Bemerkung 2.4. Man kann beweisen, dass die im Axiomensystem 2.3 postulierte Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot, P)$ tatsächlich existiert und durch das Axiomensystem “eindeutig charakterisiert wird”. Wir nennen $(\mathbb{R}, +, \cdot, P)$ die reellen Zahlen. Was “eindeutig charakterisiert” bedeutet erklären wir hier nicht — die reellen Zahlen sind genau so eindeutig erklärt wie das Schachspiel, dessen Struktur (d.h., Brett mit 8×8 Feldern, Spielfiguren und Spielregeln) immer das gleiche ist, wenngleich es verschiedene materielle Ausführungen gibt z.B. mit Figuren aus Holz, Marmor oder Elfenbein.

2.2 Induktive Menge und vollständige Induktion

Die Ziele des folgenden Abschnitts sind:

- Definition: induktive Menge
- Definition der natürlichen Zahlen als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$
- Induktionsprinzip
- Beweisschema: Beweis durch vollständige Induktion

Definition 2.5 (Induktive Menge). Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **induktiv** falls gilt:

$$(a) \ 0 \in M$$

$$(b) \ \forall n \in \mathbb{R} : (n \in M \Rightarrow (n + 1) \in M)$$

Beispiele 2.6. Beispiele für induktive Mengen sind z.B.:

$$M_1 = \{0, 1, \underbrace{1+1}_{=:2}, \underbrace{2+1}_{=:3}, \underbrace{3+1}_{=:4}, \dots\},$$

$$M_2 = \{0, 2^{-1}, 1, (1 + 2^{-1}), 2, (2 + 2^{-1}), \dots\}.$$

Nicht induktiv hingegen sind z.B. die folgenden Mengen

$$M_3 = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$M_4 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}.$$

28.10.2019

29.10.2019

Proposition 2.7. *Es gibt **genau** eine kleinste (bzgl. $\subseteq$) induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Es sei

$$\mathcal{M} := \{M : M \subseteq \mathbb{R}, M \text{ ist induktiv}\}$$

und setze

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcap \{M : M \in \mathcal{M}\}.$$

Schritt 1: Beh.: $\mathbb{N}$ ist induktiv (also $\mathbb{N} \in \mathcal{M}$).

Argument:

- Für alle $M \in \mathcal{M}$ gilt $0 \in M$, also $0 \in \mathbb{N}$.
- Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} &\Rightarrow \forall M \in \mathcal{M} : n \in M \\ &\stackrel{M \text{ induktiv}}{\Rightarrow} \forall M \in \mathcal{M} : (n+1) \in M \\ &\Rightarrow (n+1) \in \bigcap \{M : M \in \mathcal{M}\} = \mathbb{N} \end{aligned}$$

Schritt 2: $\mathbb{N}$ ist kleinstes Element in $\mathcal{M}$ bzgl. " $\subseteq$ ", denn

$$\forall M \in \mathcal{M} : \mathbb{N} \subseteq M$$

ist wahr, da $\mathbb{N}$ als Durchschnitt aller $M \in \mathcal{M}$ definiert wurde.

Schritt 3: Als kleinstes Element von $\mathcal{M}$ ist $\mathbb{N}$ eindeutig (hierzu Lemma 1.17). □

Definition 2.8 (Natürliche und ganze Zahlen). *Die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt **Menge der natürlichen Zahlen** und wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Die Menge*

$$\mathbb{Z} := \{n : n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \vee (-n) \in \mathbb{N}\}$$

*heißt **Menge der ganzen Zahlen**.*

Korollar 2.9 (Induktionsprinzip). *Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ eine induktive Menge, so gilt $M = \mathbb{N}$.*

Beweis. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq M$, da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist. Mit $M \subseteq \mathbb{N}$ folgt dann sofort $M = \mathbb{N}$. □

Proposition 2.10 (Prinzip der vollständigen Induktion). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien Aussagen $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(a) $A(0)$ ist wahr. (Induktionsanfang)

(b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist die Implikation $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$ wahr. (Induktionsschritt)

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis. Betrachte die Menge

$$M := \{n : n \in \mathbb{N}, A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Diese ist per Definition eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ und (wegen (a) und (b)) induktiv. Mit dem Induktionsprinzip (Korollar 2.10) folgt dann sofort $M = \mathbb{N}$. $\square$

Im folgenden Abschnitt werden einige Induktionsbeweise vorkommen. In Abschnitt 2.6 werden dann Eigenschaften der natürlichen Zahlen studiert.

Definition 2.11 (Rekursive Definitionen). (a) **Potenzen:** Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$a^0 := 1, \quad a^{n+1} := a \cdot a^n.$$

Falls außerdem $a \neq 0$, dann definiere weiterhin

$$a^{-n} := (a^{-1})^n.$$

Beispiel:

$$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a^1) = a \cdot (a \cdot (a \cdot a^0)) = a \cdot (a \cdot (a \cdot 1)) = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a$$

(b) **Endliche Summen/Produkte:** Für $n, m \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ definiere

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &:= 0 && \text{für } n < m \\ \sum_{k=m}^n a_k &= \left(\sum_{k=m}^{n-1} a_k \right) + a_n && \text{für } n \geq m \\ \prod_{k=m}^n a_k &:= 1 && \text{für } n < m \\ \prod_{k=m}^n a_k &= \left(\prod_{k=m}^{n-1} a_k \right) \cdot a_n && \text{für } n \geq m. \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 a_k &= ((0 + a_1) + a_2) + a_3 \\ \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{\ell=1}^k \ell \right) &= \left(0 + \sum_{\ell=1}^1 \ell \right) + \sum_{\ell=1}^2 \ell = ((0 + (0 + 1)) + (0 + 1) + 2) = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

Mithilfe dieser rekursiven Definitionen und vollständiger Induktion können alle Umformungen aus Beispiel 1.8 auch direkt aus den Körperaxiomen abgeleitet werden.

2.3 Folgerungen aus den Körperaxiomen

Ziele/Inhalt des folgenden Abschnittes sind:

- Rechenregeln
- Umformung von Summen (Produkten) und Doppelsummen (Doppelprodukten)
- Distributivgesetz für Summen
- Rechenregeln für ganzzahlige Potenzen
- Binomialkoeffizient
- Binomische Formel für $(x + y)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Definition 2.12 (Körper). *Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

*welche die Axiome (K1) bis (K5) (mit $\mathbb{K}$ anstelle von $\mathbb{R}$) erfüllen, heißt (**kommutativer**) **Körper**.*

Beispiele 2.13. • Neben $\mathbb{R}$ gibt es noch (unendlich viele) weitere Körper, z.B. $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$.

- Es gibt auch Körper mit endlich vielen Elementen. Der "kleinste" Körper ist $\mathbb{F}_2$, der lediglich aus den beiden Elementen 0 und 1, sowie den folgenden Verknüpfungen

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

besteht.

- $\mathbb{Z}$ ist hingegen kein Körper, da (K4) für die Multiplikation nicht erfüllt ist.

Bemerkung 2.14 (Summen/Produkte mit 3 Termen). • $+$ und $\cdot$ sind binäre Operatoren, d.h. sie bilden zwei Elemente eines Körpers auf eines ab (z.B. werden die Elemente a und b durch $+$ auf $a + b$ abgebildet).

- Wie können nun Summen von drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{K}$ verstanden werden?

Man kann zwei der drei Zahlen addieren und zu der resultierenden Zahl dann die dritte addieren. Dies kann auf zwei Arten geschehen:

$$(a + b) + c \quad a + (b + c).$$

- Das Assoziativgesetz (K2) stellt hierbei sicher, dass beide Ausdrücke dasselbe Resultat liefern, d.h.

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Diese Tatsache rechtfertigt es, die Klammern beim Schreiben wegzulassen, also

$$a + b + c := (a + b) + c = a + (b + c).$$

- Gleiches gilt für das Produkt, also

$$a \cdot b \cdot c := (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

- Weiterhin sind die folgenden Konventionen in der Notation üblich

$$ab := a \cdot b; \quad 2a := a + a; \quad a^2 := a \cdot a.$$

Proposition 2.15 (Rechenregeln¹⁴). Aus den Körperaxiomen (K1) – (K5) folgen für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

- (a) Die Neutralelemente 0 und 1 sind durch (K3) eindeutig bestimmt.
- (b) Die inversen Elemente (der Addition und Multiplikation) sind durch (K4) eindeutig bestimmt.
- (c) Es gibt genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $x + a = y$.
- (d) Sei $x \neq 0$. Dann gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot a = y$.
- (e) $(-(-x)) = x$ und falls $x \neq 0$, dann $((x^{-1})^{-1}) = x$.
- (f) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.
- (g) $-(x + y) = (-x) + (-y)$ und falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$, dann $((x \cdot y)^{-1}) = (x^{-1}) \cdot (y^{-1})$.
- (h) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ und falls $x \neq 0$, dann $((-x)^{-1}) = -(x^{-1})$.
- (i) Binomische Formeln

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\ (x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2, \\ (x - y)(x + y) &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

- (j) Bruchrechnen: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{(b \cdot x) + (a \cdot y)}{a \cdot b} \\ \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} &= \frac{x \cdot y}{a \cdot b} \\ \frac{\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}} &= \frac{x \cdot b}{a \cdot y}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussagen (a),(b) und (e) für die Multiplikation, sowie (g) für die Addition und (d), (i) und (j) werden in der Übung bewiesen (Blatt 4 Aufgabe 1).

¹⁴Die Rechenregeln gelten in jedem Körper

(a) für Add.: Seien $0, c \in \mathbb{K}$ zwei Neutralelemente für $+$, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{K} : \underbrace{x = x + 0}_{(1)} \wedge \underbrace{x = x + c}_{(2)}.$$

Dann folgt

$$c \stackrel{(1)}{=} c + 0 \stackrel{(K1)}{=} 0 + c \stackrel{(2)}{=} 0,$$

also

$$c = 0.$$

Für Mult.: Angenommen, es gibt zwei Einselemente $1, \tilde{1}$. Aus

$$\tilde{1} \cdot 1 \stackrel{(K3)}{=} \tilde{1} \stackrel{(K1)}{=} 1 \cdot \tilde{1} \stackrel{(K3)}{=} 1$$

ergibt sich unmittelbar die Gleichheit der beiden Elemente.

(b) für Add.: Seien $(-x), c \in \mathbb{K}$ zwei inverse Elemente zu x in $\mathbb{K}$, d.h.

$$\underbrace{0 = x + (-x)}_{(3)} \wedge \underbrace{0 = x + c}_{(4)}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} (-x) &\stackrel{(K3)}{=} (-x) + 0 \stackrel{(4)}{=} (-x) + (x + c) \stackrel{(K2)}{=} ((-x) + x) + c \\ &\stackrel{(K1)}{=} (x + (-x)) + c \stackrel{(3)}{=} 0 + c \stackrel{(K1)}{=} c + 0 \stackrel{(K3)}{=} c, \end{aligned}$$

also

$$c = (-x).$$

Für Mult.: Für ein $x \neq 0$ gebe es zwei inverse Elemente $(x^{-1}), (\tilde{x}^{-1})$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (\tilde{x}^{-1}) &\stackrel{(K4)}{=} (\tilde{x}^{-1}) \cdot 1 \stackrel{(K1)}{=} 1 \cdot (\tilde{x}^{-1}) \stackrel{(K4)}{=} (x \cdot (x^{-1})) \cdot (\tilde{x}^{-1}) \stackrel{(K1)}{=} ((x^{-1}) \cdot x) \cdot (\tilde{x}^{-1}) \\ &\stackrel{(K2)}{=} (x^{-1}) \cdot (x \cdot (\tilde{x}^{-1})) \stackrel{(K4)}{=} (x^{-1}) \cdot 1 \stackrel{(K3)}{=} (x^{-1}), \end{aligned}$$

also gilt die Gleichheit der inversen Elemente.

(c) : Zu Zeigen ist hier sowohl die Existenz, als auch die Eindeutigkeit eines solchen $a \in \mathbb{K}$. Zeige zunächst die Existenz und setze hierfür

$$(5) : \quad a := y + (-x).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} x + a &\stackrel{(5)}{=} x + (y + (-x)) \stackrel{(K1)}{=} x + ((-x) + y) \\ &\stackrel{(K2)}{=} (x + (-x)) + y \stackrel{(K4)}{=} 0 + y \stackrel{(K1)}{=} y + 0 \stackrel{(K3)}{=} y. \end{aligned}$$

Um jetzt noch die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $b \in \mathbb{K}$ ein weiteres Element des Körpers, sodass (6) : $x + b = y$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} a &\stackrel{(5)}{=} y + (-x) \stackrel{(6)}{=} (x + b) + (-x) \\ &\stackrel{(K1)}{=} (b + x) + (-x) \stackrel{(K2)}{=} b + (x + (-x)) \stackrel{(K4)}{=} b + 0 \stackrel{(K3)}{=} b. \end{aligned}$$

(d) Seien $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Dann gilt

$$x \cdot a = y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot a) = x^{-1} \cdot y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot a) \stackrel{(K2)}{=} (x^{-1} \cdot x) \cdot a \stackrel{(K4)}{=} 1 \cdot a \stackrel{(K3)}{=} a = x^{-1} \cdot y.$$

Also ist $a = x^{-1} \cdot y \stackrel{(K1)}{=} y \cdot x^{-1}$ eindeutig bestimmt.

(e) Es gilt

$$(-x) + x \stackrel{(K1)}{=} x + (-x) \stackrel{(K4)}{=} 0,$$

also ist x additiv invers zu $(-x)$. Da das inverse Element nach Aussage (b) eindeutig ist, folgt die Behauptung

$$x = -(-x).$$

Ein $y \in \mathbb{R}$ ist nach (K4) inverses Element von $x \neq 0$, falls $x^{-1} \cdot y = 1$ gilt. Nun ist

$$x \cdot x^{-1} \stackrel{(K4)}{=} 1 \stackrel{(K1)}{=} x^{-1} \cdot x = 1 \stackrel{(A7)}{=} x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}.$$

Also ist wegen der Eindeutigkeit des inversen Elementes $(x^{-1})^{-1} = x$.

(f) 1) Arg. für " $\Leftarrow$ ": Es gilt für alle $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(K3)}{=} 0 \cdot 1 \stackrel{(K1)}{=} 1 \cdot 0 \\ &\stackrel{(K4)}{=} (x + (-x)) \cdot 0 \stackrel{(K5)}{=} x \cdot 0 + (-x) \cdot 0 \\ &\stackrel{(K3)}{=} x \cdot (0 + 0) + (-x) \cdot 0 \stackrel{(K5)}{=} (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x) \cdot 0 \\ &\stackrel{(K2)}{=} x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x) \cdot 0) \stackrel{(K5)}{=} x \cdot 0 + (x + (-x)) \cdot 0 \\ &\stackrel{(K4)}{=} x \cdot 0 + 1 \cdot 0 \stackrel{(K1)}{=} x \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ &\stackrel{(K3)}{=} x \cdot 0 + 0 \stackrel{(K3)}{=} x \cdot 0 \end{aligned}$$

2) Arg. für " $\Rightarrow$ ": Sei also $x \cdot y = 0$. Unterscheide nun die Fälle $x = 0$ und $x \neq 0$.

Fall 1: Sei $x = 0$, dann gilt offensichtlich $(x = 0 \vee y = 0)$.

Fall 2: Sei $x \neq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} y &\stackrel{(K3)}{=} y \cdot 1 \stackrel{(K4)}{=} y \cdot (x \cdot (x^{-1})) \\ &\stackrel{(K2)}{=} (y \cdot x) \cdot (x^{-1}) \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0 \cdot (x^{-1}) \stackrel{''\Leftarrow''}{=} 0, \end{aligned}$$

also gilt auch hier $(x = 0 \vee y = 0)$.

(g) für Mult.: Seien $x, y \in \mathbb{K}, x \neq 0, y \neq 0$. Aufgrund der Eindeutigkeit der neutralen Elemente (Aussage (b)) genügt es zu zeigen, dass

$$(x \cdot y) \cdot ((x^{-1}) \cdot (y^{-1})) = 1$$

gilt, um die Behauptung

$$(x \cdot y)^{-1} = (x^{-1}) \cdot (y^{-1})$$

zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot ((x^{-1}) \cdot (y^{-1})) &\stackrel{(K1)}{=} (y \cdot x) \cdot ((x^{-1}) \cdot (y^{-1})) \\
&\stackrel{(K2)}{=} y \cdot (x \cdot ((x^{-1}) \cdot (y^{-1}))) \\
&\stackrel{(K2)}{=} y \cdot ((x \cdot (x^{-1})) \cdot (y^{-1})) \\
&\stackrel{(K4)}{=} y \cdot (1 \cdot (y^{-1})) \\
&\stackrel{(K1)}{=} y \cdot ((y^{-1}) \cdot 1) \\
&\stackrel{(K3)}{=} y \cdot (y^{-1}) \\
&\stackrel{(K4)}{=} 1.
\end{aligned}$$

Für Add.: Ein $z \in \mathbb{R}$ ist das inverse Element von $(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, falls $(x+y)+z = 0$ gilt. Nun ist

$$\begin{aligned}
(x+y) + ((-x) + (-y)) &\stackrel{(K1)}{=} (y+x) + ((-x) + (-y)) \stackrel{(K2)}{=} y + ((x+(-x)) + (-y)) \\
&\stackrel{(K4, K2)}{=} (y+0) + (-y) \stackrel{(K3)}{=} y + (-y) \stackrel{(K4)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des inversen Elementes folgt $-(x+y) = (-x) + (-y)$.

- (h) 1) Seien $x, y \in \mathbb{K}$. Aufgrund der Eindeutigkeit der inversen Elemente (Aussage (b)) genügt es zu zeigen, dass

$$(x \cdot y) + (x \cdot (-y)) = 0$$

gilt, um die Behauptung

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$$

zu zeigen. Es gilt

$$(x \cdot y) + (x \cdot (-y)) \stackrel{(K5)}{=} x \cdot (y + (-y)) \stackrel{(K4)}{=} x \cdot 0 \stackrel{(f)}{=} 0.$$

- 2) Seien $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$. Aufgrund der Eindeutigkeit der inversen Elemente (Aussage (b)) genügt es zu zeigen, dass

$$(-x) \cdot (-(x^{-1})) = 1$$

gilt, um die Behauptung

$$((-x)^{-1}) = (-(x^{-1}))$$

zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
(-x) \cdot (-(x^{-1})) &\stackrel{1)}{=} (-((-x) \cdot (x^{-1}))) \stackrel{(K1)}{=} (-((x^{-1}) \cdot (-x))) \\
&\stackrel{1)}{=} (-(-(x^{-1}) \cdot x)) \stackrel{(K1), (K4)}{=} (-(-1)) \stackrel{(e)}{=} 1
\end{aligned}$$

- (i) Für den Nachweis der binomischen Formeln benötigen wir noch die Beziehung $(-1)(-1) = 1$. Diese ergibt sich aus

$$\begin{aligned} (-1) \cdot 0 &\stackrel{(h)}{=} 0 \stackrel{(K4)}{=} (-1)(1 + (-1)) \stackrel{(K5)}{=} (-1)1 + (-1)^2 \stackrel{(h)}{=} (-(1 \cdot 1)) + (-1)^2 \\ &\stackrel{(K5)}{=} (-1) + (-1)^2 \Rightarrow (-1)^2 = -(-1) \stackrel{(e)}{=} 1. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \stackrel{(K5)}{=} (x + y) \cdot x + (x + y) \cdot y \stackrel{(K5)}{=} x^2 + y \cdot x + x \cdot y + y^2 \\ &\stackrel{(K1)}{=} x^2 + 2xy + y^2, \\ (x - y)^2 &= (x - y)(x - y) \stackrel{(K5), (K1)}{=} x^2 + 2 \cdot x \cdot (-y) + (-y) \cdot (-y) \\ &\stackrel{(h)}{=} x^2 - 2 \cdot x \cdot y + (-1)^2 y^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2, \\ (x - y)(x + y) &\stackrel{(K5)}{=} x^2 + x \cdot y + (-y) \cdot x + (-y) \cdot y \stackrel{(K1)}{=} x^2 + x \cdot y + x \cdot (-y) + y \cdot (-y) \\ &\stackrel{(h)}{=} x^2 + (x \cdot y) - (x \cdot y) - y^2 = x^2 - y^2. \end{aligned}$$

- (j) Für $a, b \neq 0$ gilt die Beziehung $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$, siehe (g). Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= x \cdot a^{-1} + y \cdot b^{-1} \stackrel{(K1), (K3)}{=} (x \cdot 1) \cdot a^{-1} + (y \cdot 1) \cdot b^{-1} \\ &\stackrel{(K4), (K2)}{=} x \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} + y \cdot (a \cdot a^{-1}) \cdot b^{-1} \\ &\stackrel{(K2)}{=} (x \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) + (y \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) \\ &\stackrel{(K1)}{=} (b \cdot x) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) + (a \cdot y) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) \\ &\stackrel{(K5)}{=} (b \cdot x + a \cdot y) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = (b \cdot x + a \cdot y) \cdot (a \cdot b)^{-1} = \frac{b \cdot x + a \cdot y}{a \cdot b} \\ \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} &= (x \cdot a^{-1}) \cdot (y \cdot b^{-1}) \stackrel{(K), (K2)}{=} (x \cdot y) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) \stackrel{(g)}{=} (x \cdot y) \cdot (a \cdot b)^{-1} = \frac{x \cdot y}{a \cdot b}, \\ \frac{\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}} &= \frac{x \cdot a^{-1}}{y \cdot b^{-1}} = (x \cdot a^{-1}) \cdot (y \cdot b^{-1})^{-1} \stackrel{(g)}{=} (x \cdot a^{-1}) \cdot (y^{-1} \cdot (b^{-1})^{-1}) \\ &\stackrel{(e)}{=} (x \cdot a^{-1}) \cdot (y^{-1} \cdot b) \stackrel{(K2)}{=} x \cdot (a^{-1} y^{-1}) \cdot b \stackrel{(K1)}{=} (x \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot y^{-1}) = \frac{x \cdot b}{a \cdot y}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Beziehung nur für $a, b, y \neq 0$ gilt.

□

29.10.2019

Bemerkung. Es wurde in Bemerkung 2.14 gezeigt, dass bei Termen der Form $a + b + c$ die Klammersetzung keine Rolle spielt. Das Kommutativgesetz (K1) impliziert weiterhin, dass auch die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt, d.h. es gilt

$$a + (b + c) = a + (c + b) = (a + c) + b = (c + a) + b = c + (a + b) = c + (b + a) = \dots$$

Dies lässt sich auch auf beliebige endliche Summen/Produkte erweitern, woraus das folgende Lemma resultiert.

Lemma 2.16. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $a_k \in \mathbb{R}$. Sei weiterhin

$$\sigma : \underbrace{\{k : k \in \mathbb{N}, m \leq k \leq n\}}_{=\{m, m+1, \dots, n-1, n\}} \longrightarrow \{k : k \in \mathbb{N}, m \leq k \leq n\}$$

eine Bijektion. Dann gelten

(a)

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_{\sigma(k)}$$

und

(b)

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m}^n a_{\sigma(k)}.$$

Beweis. (Blatt 4 Aufgabe 4 b)) Wir führen den Beweis nur für die Summenformel, da die Produktformel analog bewiesen werden kann.

Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, sei $I_{mn} := \{m, m+1, \dots, n\}$. Wir betrachten die Aussageform $A(m, n)$: Für eine beliebige bijektive Abbildung $\sigma : I_{mn} \rightarrow I_{mn}$ und alle $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in I_{mn}$, gilt

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_{\sigma(k)}.$$

Sei $M := \{n : n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n : A(m, n)\}$.

Für $n = 0$ gibt es genau eine bijektive Abbildung $\sigma : \{0\} \rightarrow \{0\}$, nämlich $\sigma(0) = 0$. Es folgt

$$\sum_{k=0}^0 a_k = a_0 = \sum_{k=0}^0 a_{\sigma(k)}, \text{ d.h. } n = 0 \in M.$$

Sei nun $n \in M$ und $m \leq n$. Weiter sei $\sigma : I_{m, n+1} \rightarrow I_{m, n+1}$ eine bijektive Abbildung. Dann existieren $p, q \in I_{m, n+1}$ mit $\sigma(p) = n+1$ und $\sigma(n+1) = q$. Wir betrachten die bijektive Abbildung $\tilde{\sigma} : I_{m, n+1} \rightarrow I_{m, n+1}$ mit $\tilde{\sigma}(p) = q$, $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$ und $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$ sonst. Dann ist $\tilde{\sigma}(I_{mn}) = I_{mn}$, und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n+1} a_k &= \sum_{k=m}^n a_k + a_{n+1} \stackrel{n \in M}{=} \sum_{k=m}^n a_{\tilde{\sigma}(k)} + a_{n+1} = \sum_{k=m, k \neq q}^n a_{\tilde{\sigma}(k)} + a_p + a_{n+1} \\ &= \sum_{k=m, k \neq q}^n a_{\sigma(k)} + a_{\sigma(n+1)} + a_{\sigma(p)} = \sum_{k=m}^{n+1} a_{\sigma(k)}. \end{aligned}$$

Für $m = n + 1$ ist $\sigma(n + 1) = n + 1$ die einzige bijektive Abbildung von $I_{m,n+1}$ nach $I_{m,n+1}$. Also gilt

$$\sum_{k=n+1}^{n+1} a_k = a_{n+1} = a_{\sigma(n+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+1} a_{\sigma(n+1)}.$$

Folglich ist M eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ und stimmt mit $\mathbb{N}$ überein. $\square$

Beispiel. Seien $m = 1$, $n = 3$, sowie $\sigma(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x = 1 \\ 3 & \text{für } x = 2 \\ 1 & \text{für } x = 3 \end{cases}$ Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_{\sigma(k)} &= a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)} \\ &= a_2 + a_3 + a_1 \\ &= a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=m}^n a_k \end{aligned}$$

Ähnlich dazu lassen sich auch Umformungen von Doppelsummen beweisen.

Lemma 2.17. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ gegeben. Es gilt dann

$$(2.1) \quad \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m a_{ij} \right)$$

Beweis. (Blatt 4 Aufgabe 4 c)) Wir betrachten die Aussageform $A(m, n)$ definiert durch: Für alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} \right).$$

Weiter sei $M := \{n : n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : A(m, n)\}$.

Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^0 \left(\sum_{j=0}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^m a_{0j} = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^0 a_{ij} \right), \text{ d.h. } n = 0 \in M.$$

Sei nun $n \in M$. Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \left(\sum_{j=0}^m a_{ij} \right) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m a_{ij} \right) + \sum_{j=0}^m a_{n+1,j} \stackrel{n \in M}{=} \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} \right) + \sum_{j=0}^m a_{n+1,j} \\ &= \sum_{j=0}^m \left(a_{n+1,j} + \sum_{i=0}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^{n+1} a_{ij} \right) \text{ d.h. } n + 1 \in M. \end{aligned}$$

Also ist die Menge M induktiv und stimmt somit mit $\mathbb{N}$ überein. $\square$

Beispiel. Ordnet man die a_{ij} wie folgt in einer Matrix an

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dann entspricht

- $\sum_{i=0}^n a_{ij}$ der Spaltensumme der j -ten Spalte,
- $\sum_{j=0}^m (\sum_{i=0}^n a_{ij})$ der Summe über alle Spaltensummen, also der Summe über alle Einträge,
- $\sum_{j=0}^m a_{ij}$ der Zeilensumme der i -ten Zeile,
- $\sum_{i=0}^n (\sum_{j=0}^m a_{ij})$ der Summe über alle Zeilensummen, also ebenfalls der Summe über alle Einträge.

Bemerkung. Auch die nachfolgenden Identitäten lassen sich analog mittels Induktion zeigen (s. Übung)

- Umordnen von Produkten:

$$(2.2) \quad \prod_{j=0}^m \left(\prod_{i=0}^n a_{ij} \right) = \prod_{i=0}^n \left(\prod_{j=0}^m a_{ij} \right)$$

- Distributivgesetz für Summen:

$$(2.3) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i b_j)$$

Beweis. (Blatt 4 Aufgabe 4 d)) Wir betrachten die Aussageform $A(m, n)$ definiert durch: Für alle $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_i b_j).$$

Weiter sei $M := \{n : n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : A(m, n)\}$.

Für $n = 0$ gilt

$$\left(\sum_{i=0}^0 a_i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j \right) = a_0 \cdot \sum_{j=0}^m b_j = \sum_{j=0}^m a_0 b_j = \sum_{i=0}^0 \left(\sum_{j=0}^m a_i b_j \right), \text{ d.h. } n = 0 \in M.$$

Sei nun $n \in M$. Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j \right) &= \left(\sum_{i=0}^n a_i + a_{n+1} \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j \right) + a_{n+1} \sum_{j=0}^m b_j \\
 &\stackrel{n \in M}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_i b_j) + \sum_{j=0}^m (a_{n+1} b_j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_i b_j) + \sum_{i=n+1}^{n+1} \sum_{j=0}^m (a_i b_j) \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^m (a_i b_j) \text{ d.h. } n+1 \in M.
 \end{aligned}$$

Also ist die Menge M induktiv und stimmt somit mit $\mathbb{N}$ überein. $\square$

• *Ganzzahlige Potenzen:*

(2.4)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z} : (a) x^n \cdot x^m = x^{n+m}, (b) (x^n)^m = x^{nm}, (c) x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

(mit $x \neq 0$, bzw. $y \neq 0$ falls $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ oder $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$)

Beweis. (Blatt 4 Aufgabe 5) Wir beweisen die Formeln für $n, m \in \mathbb{N}$ per Induktion.

(a) Für $x = 0$ gilt $0^0 := 1$ und $0^n = 0 \cdot 0^{n-1} = 0$ für $n \geq 1$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 m = n = 0 : \quad & 0^0 \cdot 0^0 = 1 = 0^{0+0}, \\
 m = 0, n > 0 : \quad & 0^n \cdot 0^0 = 1 \cdot 0 = 0 = 0^{0+n}, \\
 m, n > 0 : \quad & 0^n \cdot 0^m = 0 = 0^{m+n}.
 \end{aligned}$$

Also gilt die Beziehung für $x = 0$.

Sei nun $A(m, n)$ die Aussageform: Es gilt $x^n x^m = x^{n+m} = x^m x^n$ für alle $x \neq 0$.

Weiter sei

$$M := \{n : n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z} : A(m, n)\}.$$

Für $n = 0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$x^0 \cdot x^m \stackrel{\text{Def.}}{=} 1 \cdot x^m \stackrel{(K3)}{=} x^m \stackrel{(K3)}{=} x^{m+0} \stackrel{(K1)}{=} x^m \cdot x^0, \text{ d.h. } n = 0 \in M.$$

Sei nun $n \in M$. Für $n + 1$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\begin{aligned}
 x^{n+1} \cdot x^m &\stackrel{\text{Def.}}{=} (x^n \cdot x^1) \cdot x^m \stackrel{(K1, K2)}{=} x^1 \cdot (x^n \cdot x^m) \stackrel{n \in M}{=} x^{n+m} \cdot x^1 \stackrel{\text{Def.}}{=} x^{(n+m)+1} \\
 &\stackrel{(K2)}{=} x^{(n+1)+m} \stackrel{(K1)}{=} x^m \cdot x^{n+1},
 \end{aligned}$$

d.h., es gilt $n + 1 \in M$. Somit ist M induktiv und stimmt mit $\mathbb{N}$ überein.

Für $n \in \mathbb{Z}, n < 0$, und gehen wir zu $z = x^{-1}$ über und erhalten die Aussage

$$x^n \cdot x^m = z^{-n} \cdot z^{-m} = z^{-n-m} = (x^{-1})^{-n-m} = x^{n+m}$$

aus der Definition der Potenz. Somit gilt die Beziehung für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Wir beweisen die Beziehung wiederum zunächst für $x = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} m = n = 0 : \quad & (0^0)^0 = 1^0 = 1 = 1^{0 \cdot 0}, \\ m = 0, n > 0 : \quad & (0^n)^0 = 0^0 = 1 = 0^{0 \cdot n} = 0^0, \\ m, n > 0 : \quad & (0^n)^m = 0^m = 0 = 0^{m \cdot n} = (0^m)^n. \end{aligned}$$

Sei nun $A(m, n)$ die Aussageform: Es gilt $(x^n)^m = x^{n \cdot m} = (x^m)^n$ für alle $x \neq 0$. Weiter sei

$$M := \{n : n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z} : A(m, n)\}.$$

Für $n = 0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(x^0)^m = 1^m = 1 = x^{0 \cdot m} = (x^m)^0, \text{ d.h. } n = 0 \in M.$$

Sei nun $n \in M$. Für $n + 1$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\begin{aligned} (x^{n+1})^m &\stackrel{\text{Def.}}{=} (x^n \cdot x^1)^m = (x^n \cdot x)^m \stackrel{c)}{=} (x^n)^m \cdot x^m \stackrel{n \in M}{=} x^{n \cdot m} \cdot x^m \stackrel{c)}{=} x^{n \cdot m + m} = x^{m(n+1)} \\ &= (x^m)^n \cdot x^m \stackrel{\text{Def.}}{=} (x^m)^{n+1}. \end{aligned}$$

Somit ist M induktiv und stimmt mit $\mathbb{N}$ überein.

Für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, und gehen wir zu $z = x^{-1}$ über und erhalten die Aussage

$$(x^n)^m = (z^{-n})^m = z^{-n \cdot m} = (z^{-1})^{n \cdot m} = x^{n \cdot m}$$

aus der Definition der Potenz. Somit gilt die Beziehung für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Wir beweisen die Beziehung wiederum zunächst für $x = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & 0^0 \cdot y^0 = 1 \cdot 1 = 1 = 0^0 = (0 \cdot y)^0, \\ n > 0 : \quad & (0^n) \cdot y^n = 0 \cdot y^n = 0 = 0^n = (0 \cdot y)^n. \end{aligned}$$

Analog folgt die Aussage für $y = 0$.

Sei nun $A(n)$ die Aussageform: Es gilt $x^n y^n = (xy)^n$ für alle $x, y \neq 0$. Weiter sei

$$M := \{n : n \in \mathbb{N} : A(n)\}.$$

Für $n = 0$ gilt

$$x^0 y^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (xy)^0, \text{ d.h. } n = 0 \in M.$$

Sei nun $n \in M$. Für $n + 1$ folgt

$$x^{n+1} y^{n+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} (x^n \cdot x^1) \cdot (y^n \cdot y^1) \stackrel{(K1), (K2)}{=} (x^n y^n)(xy) \stackrel{n \in M}{=} (xy)^n (xy)^1 \stackrel{\text{Def.}}{=} (xy)^{n+1}.$$

Somit ist M induktiv und stimmt mit $\mathbb{N}$ überein.

Für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, und gehen wir zu $u = x^{-1}$, $v = y^{-1}$ über und erhalten die Aussage

$$x^n y^n = u^{-n} v^{-n} = (uv)^{-n} = (u^{-1} v^{-1})^n = (xy)^n.$$

Somit gilt die Beziehung für alle $n \in \mathbb{Z}$.

□

Definition 2.18 (Binomialkoeffizient). Für $k, n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{n}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad (\text{falls } k \geq 1)$$

Lemma 2.19. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

(a)

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{falls } k > n$$

(b)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \text{falls } 0 \leq k \leq n$$

(c)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{falls } 1 \leq k \leq n.$$

Beweis. (Blatt 4 Aufgabe 6)

(a) Nach Definition gilt $\binom{n}{0} := 1$ und

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{\prod_{j=1}^k (n-j+1)}{\prod_{j=1}^k j} = \frac{\prod_{j=1}^k (n-j+1)}{k!} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Falls $k > n$ ist, dann gilt

$$\prod_{j=1}^k (n-j+1) = \prod_{j=1}^n (n-j+1) \cdot \underbrace{(n-(n+1)+1)}_{=0} \cdot \prod_{j=n+2}^k (n-j+1) = 0.$$

Also ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

(b) Für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\prod_{j=1}^k (n-j+1) = \frac{\prod_{j=1}^n (n-j+1)}{\prod_{j=k+1}^n (n-j+1)} = \frac{n!}{(n-k)(n-k-1) \dots (n-n+1)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Wir erhalten

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{j=1}^k (n-j+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(c) Sei nun $1 \leq k \leq n$. Wir betrachten die Aussage $A(n)$: Für $1 \leq k \leq n$ gilt die Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1, A(n) = W\}$.

Für $n = 1$ ist $k = 1$ und nach der obigen Formel gilt

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1 = \binom{0}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 \text{ d.h. } 1 \in M.$$

Sei nun $n \in M$. Für $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k + (n-k+1)}{k \cdot (n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Für $k = n+1$ ist

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \frac{n!}{n!(n-n)!} + 0 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-(n+1))!} = \binom{n+1}{n+1}.$$

Folglich gehört auch $n+1$ zu M und die Formel ist richtig für alle $n \in M$.

□

Satz 2.20 (Binomische Formel). Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis. Vollständige Induktion über n . Betrachte die Menge

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} : \forall x, y \in \mathbb{R} : (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right\}.$$

Ind.Anfang: Für $n = 0$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \underbrace{\binom{0}{0}}_{=1} \underbrace{x^0}_{=1} \underbrace{y^0}_{=1} = 1 = (x+y)^0$$

Ind.Schritt: Sei $n \in M$. Es gilt dann für $n + 1$

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &\stackrel{\text{Def.}}{=} (x+y)(x+y)^n \\
&\stackrel{\text{I.A.}}{=} (x+y) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \\
&\stackrel{\text{Distrib.}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \underbrace{\binom{n}{0} x^{n+1} y^0}_{=1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}}_{(*)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n}{0} x^0 y^{n+1}}_{=1} \\
&\stackrel{k \mapsto k-1 \text{ in } (*)}{=} \underbrace{\binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0}_{=1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1}}_{=1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)}_{=\binom{n+1}{k}} x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen

Definition 2.21 (angeordneter kommutativer Körper). *Ein kommutativer Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit Positivbereich $P \subseteq \mathbb{K}$ heißt **angeordneter (kommutativer) Körper**, falls die Anordnungsaxiome (O1) und (O2) gelten.*

Beispiel. • Die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 : x = \frac{p}{q} \right\}$$

bilden einen geordneten Körper.

- $\mathbb{F}_2$ kann nicht angeordnet werden.

Begründung: Es gilt $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$, also $1 = (-1)$. Nach (O1) ist jedoch für alle $x \neq 0$, dass **entweder** $x \in P$ **oder** $-x \in P$ wahr, also insbesondere **nicht** sowohl $x \in P$ als auch $-x \in P$.

Alle Aussagen in diesem Kapitel werden für $\mathbb{R}$ formuliert, gelten aber auch für beliebige andere angeordnete Körper (also z.B. für $\mathbb{Q}$).

Lemma 2.22. (a) **Trichotomie:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt **genau eine** der drei Aussagen

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

(b) Die Relationen $<, \leq, \geq$ und $>$ sind transitiv.

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind die Mengen $(M, \leq)$ und $(M, \geq)$ **total geordnet**.

Beweis. (a) Folgt direkt aus (O1) für $x = a - b$.

(b) Hier nur für " $<$ ":

$$\begin{aligned}(a < b) \wedge (b < c) &\Rightarrow b - a, c - b \in P \\ &\stackrel{(O2)}{\Rightarrow} c - a = (c - b) + (b - a) \in P \\ &\Rightarrow a < c.\end{aligned}$$

(c) Zeige hier nur die Antisymmetrie von " $\geq$ ":

$$\text{z.Z.: } \forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b.$$

Widerspruchsbeweis: Es gilt

$$\begin{aligned}a \geq b \wedge b \geq a \wedge a \neq b &\Rightarrow (a > b \vee a = b) \wedge (b > a \vee b = a) \wedge a \neq b \\ &\Rightarrow a > b \wedge b > a \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch zur Trichotomie (Aussage (a)).}\end{aligned}$$

□

Proposition 2.23 (Rechenregeln). Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a)

$$\begin{aligned}a < b \wedge c \leq d &\Rightarrow a + c < b + d \\ a \leq b \wedge c \leq d &\Rightarrow a + c \leq b + d\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}a < b \wedge c > 0 &\Rightarrow ac < bc \\ a \leq b \wedge c > 0 &\Rightarrow ac \leq bc \\ a < b \wedge c < 0 &\Rightarrow ac > bc \\ a \leq b \wedge c < 0 &\Rightarrow ac \geq bc\end{aligned}$$

$$\text{Insbesondere } (a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow ab > 0, \quad (a > 0 \wedge b < 0) \Rightarrow ab < 0$$

(c)

$$d \neq 0 \Rightarrow d^2 > 0 \quad (\text{Insbesondere } 1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0)$$

(d)

$$\begin{aligned} 0 < a &\Rightarrow 0 < a^{-1} \\ a < 0 &\Rightarrow a^{-1} < 0 \end{aligned}$$

(e)

$$0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} > 0$$

Beweis. (Blatt 5 Aufgabe 2) Wir beachten folgende Beziehungen: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow P \ni (b - a) = (b + c) - (a + c) \Leftrightarrow a + c < b + c, \\ a \leq b &\Leftrightarrow (b - a = 0 \vee b - a \in P) \Leftrightarrow ((b + c) - (a + c) = 0 \vee (b + c) - (a + c) \in P) \\ &\Leftrightarrow (a + c \leq b + c). \end{aligned}$$

(a) Es gelten

$$\begin{aligned} a < b \wedge c \leq d &\Rightarrow a + c < b + c \leq b + d \Rightarrow a + c < b + d \quad \text{und} \\ a \leq b \wedge c \leq d &\Rightarrow a + c \leq b + c \leq b + d. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} a < b \wedge c > 0 &\Leftrightarrow (b - a \in P \wedge c \in P) \Leftrightarrow (b - a)c = bc - ac \in P \Leftrightarrow bc > ac, \\ a \leq b \wedge c > 0 &\Leftrightarrow ((b - a \in P) \vee (b - a = 0)) \wedge (c \in P) \\ &\Leftrightarrow (((b - a)c = bc - ac \in P) \vee ((b - a)c = 0 \cdot c = 0)) \Leftrightarrow bc \geq ac, \\ a < b \wedge c < 0 &\Leftrightarrow (b - a \in P \wedge -c \in P) \Leftrightarrow (b - a)(-c) = -bc + ac \in P \Leftrightarrow bc < ac, \\ a \leq b \wedge c < 0 &\Leftrightarrow ((b - a \in P) \vee (b - a = 0)) \wedge (-c \in P) \\ &\Leftrightarrow (((b - a)(-c) = -bc + ac \in P) \vee ((b - a)(-c) = 0 \cdot (-c) = 0)) \\ &\Leftrightarrow bc \leq ac. \end{aligned}$$

(c) Wegen (O1) gilt **entweder** $d < 0$ oder $d > 0$.

Sei $d > 0$, dann gilt nach (O2) sofort $d^2 = d \cdot d > 0$.

Für $d < 0$, wähle $a = d, b = 0, c = d$. Dann gilt nach Aussage (b): $d^2 = d \cdot d > 0 \cdot d = 0$.

(d) Widerspruchsbeweis: Sei $a > 0$ und $a^{-1} \leq 0$. Als inverses Element gilt $a^{-1} \neq 0$, also $a^{-1} < 0$. Nach Aussage (b) gilt dann $1 = a \cdot a^{-1} < 0$, was einen Widerspruch zu $1 > 0$ darstellt.

Für $a < 0$ folgt die Aussage aus der Betrachtung von $-a > 0$ mit $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

(e) Wegen $0 < a < b$ gilt $a^{-1}, b^{-1} > 0$ und auch $a^{-1}b^{-1} = (a \cdot b)^{-1} > 0$. Nach Teil b) folgt nun

$$\begin{aligned} 0 < a < b \wedge (a \cdot b)^{-1} > 0 &\Rightarrow 0 \cdot (a \cdot b)^{-1} = 0 < a \cdot (a \cdot b)^{-1} = a \cdot (a^{-1}b^{-1}) \\ &\stackrel{(K2)}{=} (a \cdot a^{-1})b^{-1} \stackrel{(K4, K1, K3)}{=} b^{-1} < b \cdot (a^{-1}b^{-1}) \\ &\stackrel{(K2, K1)}{=} a^{-1} \cdot (b \cdot b^{-1}) \stackrel{(K4, K1, K3)}{=} a^{-1}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.24.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad \exists c \in \mathbb{R} : a < c < b$$

Beweis.

•

$$1 > 0 \quad \stackrel{(O2)}{\Rightarrow} \quad 2 = 1 + 1 > 0 \quad \stackrel{2.23(d)}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{2} = 2^{-1} > 0$$

•

$$a < b \quad \stackrel{2.23(b)}{\Rightarrow} \quad \frac{a}{2} = a \cdot \frac{1}{2} < b \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2}$$

•

$$a = 1 \cdot a = \frac{1+1}{2} \cdot a = \frac{a+a}{2} \quad \stackrel{2.23(a)}{<} \quad \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{=:c} \quad \stackrel{2.23(a)}{<} \quad \frac{b+b}{2}$$

□

Definition 2.25 (Betrag, Maximum, Minimum zweier Zahlen). Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

der **Betrag** von x . Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiere

$$\max\{x, y\} := \begin{cases} x, & x \geq y, \\ y & x < y \end{cases}$$

und

$$\min\{x, y\} := \begin{cases} y, & x \geq y \\ x, & x < y \end{cases}$$

Bemerkung. Offensichtlich gilt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\min\{x, y\} \leq x \leq \max\{x, y\}$$

und

$$|x| = \max\{x, -x\} = |-x|.$$

Lemma 2.26 (Eigenschaften des Betrages). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a) \quad |x| \geq 0 \text{ und } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{positiv definit})$$

$$(b) \quad |xy| = |x| \cdot |y| \quad (\text{positiv 1-homogen})$$

$$(c) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$(d) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (\text{Umgekehrte Dreiecksungleichung})$$

Beweis. (a) $|x| \geq 0$ und $|0| = 0$ folgen sofort aus der Definition. Ist $x \neq 0$, dann gilt $\max\{x, -x\} > 0$.

- (b) Es genügt $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ zu betrachten (sonst $0 = 0$). Führe dann eine Fallunterscheidung über die Vorzeichen von x und y durch.

•

$$\begin{aligned} x > 0, y > 0 & \stackrel{2.23}{\Rightarrow} xy > 0 \\ & \Rightarrow |xy| = x \cdot y = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} x > 0, y < 0 & \stackrel{2.23}{\Rightarrow} xy < 0 \\ & \Rightarrow |xy| = -(xy) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} x < 0, y > 0 & \stackrel{2.23}{\Rightarrow} xy < 0 \\ & \Rightarrow |xy| = -(xy) = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} x < 0, y < 0 & \stackrel{2.23}{\Rightarrow} xy > 0 \\ & \Rightarrow |xy| = x \cdot y = -(-(x \cdot y)) = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

- (c) Aus $x \leq \max\{x, -x\} = |x|$ und $y \leq \max\{y, -y\} = |y|$ folgt

$$x + y \leq |x| + |y|, \quad \text{sowie} \quad -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$$

also

$$|x + y| = \max\{(x + y), -(x + y)\} \leq |x| + |y|.$$

- (d) (Blatt 5 Aufgabe 3) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |x| &= |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|, \\ |y| &= |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x|. \end{aligned}$$

Daraus folgt $||x| - |y|| \leq |x - y| = |y - x|$.

□

Lemma 2.27. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a)

$$a < b \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : a + \varepsilon \leq b$$

(b)

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : a - \varepsilon < b$$

Beweis. (a) (1) Arg. für $\Rightarrow$: Setze

$$\varepsilon = b - a \stackrel{\text{Voraus.}}{>} 0$$

dann gilt offensichtlich

$$a + \varepsilon = b \leq b.$$

(2) Arg. für $\Leftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ mit $a + \varepsilon \leq b$. Dann

$$b - a \geq \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad a < b.$$

(b) (1) Arg. für $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow b - a \geq 0 \\ &\stackrel{2.23}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 : b - a + \varepsilon > 0 \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : b > a - \varepsilon \end{aligned}$$

(2) Arg. für $\Leftarrow$: (indirekter Beweis)

$$\begin{aligned} a > b &\stackrel{(a)}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 : b + \varepsilon \leq a \\ &\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : a - \varepsilon \geq b \\ &\Rightarrow \neg(\forall \varepsilon > 0 : a - \varepsilon < b) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. • Die griechischen Buchstaben ε und δ werden gerne für positive aber klein zu wählende Variablen verwendet.

• Alle Aussagen dieses Kapitels gelten allgemein in angeordneten Körpern.

2.5 Folgerungen aus dem Supremumsaxiom

Definition 2.28 (Maximum, Minimum). Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Das kleinste (bzw. größte) Element der geordneten Menge $(M, \leq)$ heißt (falls es existiert) **Minimum** (bzw. **Maximum**) der Menge M . Wir benutzen die Notation $\min M$, bzw. $\max M$ für das Minimum und Maximum von M .¹⁵

Bemerkung 2.29. (a) Wenn $(M, \leq)$ total geordnet ist, so sind Minimum und Maximum eindeutig bestimmt und entsprechen den Definitionen des größten/kleinsten Elements im Sinne von Definition 1.16.

(b) Mengen mit ein oder zwei Elementen, $M = \{x, y\}$, besitzen Minimum und Maximum, es gilt dann $\min M = \min\{x, y\}$ und $\max M = \max\{x, y\}$.

(c) Jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit endlicher Elementanzahl (also $|M| \in \mathbb{N}$) besitzt ein Minimum und ein Maximum. Gezeigt werden kann dies mittels Induktion über $|M|$. (s. Übung)

(d) Betrachte die folgenden Mengen

- $M_1 := \{x : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$. dann $\max M_1 = 1$, $\min M_1 = 0$
- $M_2 := \{x : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x\}$. dann $\min M_2 = 0$, kein $\max$
- $M_3 := \mathbb{Z}$. dann kein $\max$ / $\min$

¹⁵Die Schreibweisen $\min(M)$ und $\max(M)$ sind auch gebräuchlich und bedeuten das selbe.

- $M_4 := \mathbb{N}$. dann $\min M_4 = 0$, aber M_4 besitzt kein Maximum (was wir noch zeigen werden).

(e) Betrachte die Menge

$$M_5 := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_+$

$$n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow n \geq 1 \stackrel{2.23}{\Rightarrow} 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

Da $\frac{1}{n} = 1$ für $n = 1 \in \mathbb{N}_+$, gilt $\max M_5 = 1$. Allerdings

- M_5 besitzt kein Minimum (insbesondere ist 0 kein Minimum von M_5). Wir zeigen dies hier durch ein Widerspruchsargument:

Angenommen $\frac{1}{n} \in M_5$ sei Minimum, dann folgt aus $n \in \mathbb{N}_+$ auch $n+1 \in \mathbb{N}_+$ und somit

$$n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

somit erhält man einen Widerspruch zur Minimalität von $\frac{1}{n}$.

- 0 ist dennoch von besonderer Bedeutung für die Menge M_5 . Es gilt

$$\forall x \in M_5 : 0 \leq x \quad \wedge \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M_5 : x < 0 + \varepsilon.$$

Die erste der beiden Aussagen gilt auch für alle Zahlen, die kleiner als 0 sind (also z.B. für $-0.1, -50$). Beide Aussagen zusammen gelten jedoch nur für 0. Aufgrund dieser Eigenschaft wird 0 als **Infimum** der Menge M bezeichnet, worauf im Folgenden eingegangen werden soll.

Definition 2.30 (Schranken, Infimum, Supremum). Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt

- **obere Schranke** von M , falls $\forall x \in M : x \leq a$,
- **unter Schranke** von M , falls $\forall x \in M : x \geq a$.

(b) Die Menge M heißt

- **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, falls M eine obere (bzw. untere) Schranke besitzt,
- **beschränkt** wenn M sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt ist,
- **unbeschränkt**, falls M **nicht** beschränkt ist.

(c) $a \in \mathbb{R}$ heißt

- **Supremum** von M , wenn a die kleinste obere Schranke von M ist,
- **Infimum** von M , wenn a die größte untere Schranke von M ist.

Wir schreiben in diesen Fällen $a =: \sup M$ (bzw. $a =: \inf M$) für das Supremum von M (bzw. Infimum von M). Die Schreibweisen $\sup(M)$ (bzw. $\inf(M)$) sind auch gebräuchlich.

04.11.2019

11.11.2019

Bemerkung 2.31. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, und betrachte die Menge der oberen Schranken von M ,

$$O := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist obere Schranke von } M\}.$$

Dann:

- $O \neq \emptyset \Leftrightarrow M$ ist nach oben beschränkt.
- $a \in \mathbb{R}$ ist Supremum von $M \Leftrightarrow a$ ist kleinstes Element von O
- $(O, \leq)$ ist total geordnet. Also folgt, dass kleinste Elemente eindeutig sind. Also ist auch das Supremum (falls existent) eindeutig.
- Es gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

a ist Maximum von $M \Rightarrow a$ ist Supremum von $M \Rightarrow a$ ist obere Schranke von M
und

$$a \text{ ist obere Schranke von } M \wedge a \in M \Rightarrow a \text{ ist Maximum von } M.$$

Für das Minimum/Infimum gelten analoge Aussagen.

- Betrachte die Menge $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$ aus Bsp. 2.29(e). Dann ist jede nicht-positive Zahl untere Schranke und jede Zahl ≥ 1 obere Schranke von M . Wegen $1 \in M$ ist 1 also sowohl das Maximum, als auch das Supremum von M , wegen $0 \notin M$ jedoch ist 0 "nur" das Infimum von M und nicht das Minimum.

Definition 2.32 (Intervalle, $+\infty, -\infty$). (a) Wir erweitern $\mathbb{R}$ um die Elemente $+\infty$ und $-\infty$, und erhalten so die Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Wir setzen die Relation $\leq$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort, indem $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gesetzt wird. Hierdurch wird $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ eine total geordnete Menge. (Bemerge: Die beiden Zeichen ∞ und $-\infty$ bezeichnen **keine** (reellen) Zahlen, insbesondere kann nicht uneingeschränkt mit ihnen gerechnet werden.)

(b) Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die folgenden Intervalle:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && (\text{abgeschlossenes Intervall}) \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && (\text{offenes Intervall}) \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && (\text{halb-/linksoffenes Intervall}) \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && (\text{halb-/rechtsoffenes Intervall}) \end{aligned}$$

Beispiel. • $[-\infty, \infty] = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ (**nicht** $\overline{\mathbb{R}}$) sind $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ und $(a, b]$ beschränkt mit Supremum $\sup = b$ und Infimum $\inf = a$.
- Für $a \in \mathbb{R}$ ist $(-\infty, a)$ unbeschränkt (aber nach oben beschränkt) und (a, ∞) unbeschränkt (aber nach unten beschränkt).

Definition 2.33. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Wir definieren

- $\sup M := +\infty$, falls M nicht nach oben beschränkt ist,
- $\inf M := -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt ist,
- $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := +\infty$.

Bemerkung. Wir möchten die Definition von $\sup \emptyset$ motivieren. Zunächst stellen wir fest: Besitzt eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum, so gilt:

$$(2.5) \quad a \text{ ist obere Schranke für } M \Rightarrow \sup M \leq a.$$

Nun betrachten wir die leere Menge. Es gilt: Jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke der leeren Menge, denn es gilt $\forall x \in \emptyset : x \leq a$. Die Menge aller oberen Schranken zu $\emptyset$ ist also $\mathbb{R}$ und besitzt demnach kein kleinstes Element. Jedoch gilt nach Definition von $-\infty$: $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty \leq x$. Mit der Festlegung $\sup \emptyset = -\infty$ gilt (2.5) also auch im Fall $M = \emptyset$.

Bemerkung. Warnung: Ist M nach oben unbeschränkt oder $M = \emptyset$, so besitzt M kein Supremum, dennoch gilt mit obiger Definition $\sup M = +\infty$ oder $\sup M = -\infty$. Man sagt in diesem Fall auch häufig "das Supremum von M ist $+\infty$ oder $-\infty$ ", wenngleich $+\infty$ oder $-\infty$ kein Supremum im Sinne unserer Definition sein kann, denn ein Supremum ist eine reelle Zahl. Gleiches gilt für das Infimum. Wir werden später sehen, dass diese Festlegung dennoch praktisch ist.

Bemerkung. Alle Aussagen bis zu dieser Stelle gelten auch in allen anderen angeordneten Körpern.

Axiom 2.34 (Supremumsaxiom). Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Proposition 2.35 (Existenz der Wurzel). Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ gibt es **genau** ein $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, sodass $b^2 = a$. b heißt dann (**Quadrat-)**Wurzel von a . Wir verwenden die Notation $\sqrt{a} := b$.

Beweis. (1) Existenz: Betrachte die Menge $M := \{c \in \mathbb{R} : c \geq 0 \wedge c^2 \leq a\}$. Diese ist nichtleer (da $0 \in M$) und sie ist nach oben durch $a + 1$ beschränkt. Zeige letzteres wie folgt durch Widerspruch:

Sei $c \in M \wedge c > a + 1$. Dann gilt $c^2 > (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 \geq a^2$, was einen Widerspruch zu $c \in M$ darstellt.

Aus dem Supremumsaxiom folgt nun, dass M ein Supremum $b \in \mathbb{R}$ besitzt. Für dieses gilt $b \geq 0$ (da $0 \in M$ und b obere Schranke) und $b \leq a + 1$ (da $a + 1$ auch eine obere Schranke und b die kleinste obere Schranke ist).

Beh.: $b^2 = a$

Aufgrund der Trichotomie genügt es zu zeigen, dass weder $b^2 < a$, noch $b^2 > a$ gelten kann. Für $b^2 > a$ wähle $\varepsilon := \frac{b^2 - a}{2b} > 0$, dann

$$\begin{aligned}(b - \varepsilon)^2 &= b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \stackrel{\varepsilon > 0}{>} b^2 - 2b\varepsilon = a \\ &\Rightarrow \forall c \in M : c^2 \leq a^2 < (b - \varepsilon)^2 \\ &\Rightarrow \forall c \in M : c < (b - \varepsilon) \\ &\Rightarrow (b - \varepsilon) \text{ ist obere Schranke von } M\end{aligned}$$

Dies stellt jedoch einen Widerspruch dazu dar, dass b die kleinste obere Schranke von M ist (da $b - \varepsilon < b$).

Für $b^2 < a$ wähle $\varepsilon := \min\{1, \frac{a - b^2}{2b + 1}\}$, dann gilt

$$\begin{aligned}(b + \varepsilon)^2 &= b^2 + \varepsilon(2b + \varepsilon) \leq b^2 + \varepsilon(2b + 1) \leq b^2 + a - b^2 = a \\ \Rightarrow (b + \varepsilon) &\in M, \text{ was einen Widerspruch dazu darstellt, dass } b \text{ eine obere Schranke ist}\end{aligned}$$

(2) Eindeutigkeit: Seien $b, c \in \mathbb{R}$, $b, c \geq 0$ mit $b^2 = c^2 = a$. Dann gilt

$$0 = a - a = b^2 - c^2 = (b + c) \cdot (b - c),$$

also muss $b + c = 0$ oder $b - c = 0$ gelten. Aus $b - c = 0$ folgt sofort $b = c$, aus $b + c = 0$ folgt $b = -c$ und in Kombination mit $b, c \geq 0$ muss dann $b = c = 0$ gelten. □

Bemerkung. Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 : x = \frac{p}{q}\}$$

die Menge der rationalen Zahlen. Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrational.

Satz 2.36 (Euklid). $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis. Durch Widerspruch: Angenommen $\exists p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0 : \frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Durch Kürzen dürfen wir annehmen, dass höchstens eine der beiden Zahlen p und q gerade ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned}2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow p \text{ ist gerade} \\ \Rightarrow p &= 2r \text{ für ein } r \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2 \\ \Rightarrow q^2 &= 2r^2 \Rightarrow q \text{ ist gerade}\end{aligned}$$

Hieraus resultiert ein Widerspruch zur Annahme, dass höchstens eine der Zahlen p und q gerade ist. □

Korollar 2.37. $\mathbb{Q}$ erfüllt die Körper- und Ordnungsaxiome, aber nicht das Supremumsaxiom.

Lemma 2.38. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Setze $-M := \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$. Es gelten dann

(a) M ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow -M$ ist nach unten beschränkt

(b) M ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow -M$ ist nach oben beschränkt

(c) a ist Supremum von M $\Leftrightarrow -a$ ist Infimum von $-M$

(d) a ist Infimum von M $\Leftrightarrow -a$ ist Supremum von $-M$

Beweis. (hier nur (a) und (c))

(a) folgt aus den folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned} a \text{ ist obere Schranke von } M &\Leftrightarrow \forall x \in M : x \leq a \\ &\Leftrightarrow \forall x \in M : -x \geq -a \\ &\Leftrightarrow \forall y \in (-M) : y \geq -a \\ &\Leftrightarrow (-a) \text{ ist untere Schranke von } -M \end{aligned}$$

(c) Übung.

□

Korollar 2.39. Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Beweis. Folgt aus dem Supremumsaxiom und Lemma 2.38.

□

2.6 Eigenschaften der natürlichen Zahlen

Erinnerung: Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wurde als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert.

Proposition 2.40 (Eigenschaften der natürlichen Zahlen). (a) $0 \in \mathbb{N}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0$

(c) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N} \wedge n \cdot m \in \mathbb{N}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : n - 1 \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$

(e) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n : m - n - 1 \in \mathbb{N}$

(f) Zwischen n und $n + 1$ liegt keine weitere natürliche Zahl

Beweis. (a) gilt, da $\mathbb{N}$ induktiv ist.

(b) Die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 0\}$ ist induktiv, denn es gilt zum einen offensichtlich $0 \in M$ und zum anderen

$$\begin{aligned} n \in M &\Rightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 0 \stackrel{\mathbb{N} \text{ ind. und 2.23}}{\Rightarrow} (n + 1) \in \mathbb{N} \wedge n + 1 \geq 0 \\ &\Rightarrow n + 1 \in M. \end{aligned}$$

Es folgt $\mathbb{N} \subseteq M$, sowie $M \subseteq \mathbb{N}$ nach Definition, also $M = \mathbb{N}$.

- (c) Sei $n \in \mathbb{N}$, definiere $M_n := \{m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N} \wedge n \cdot m \in \mathbb{N}\}$. Prüfe nun nach, dass M_n induktiv ist, woraus wie in (b) $M = \mathbb{N}$ folgt.
- (d) Übung
- (e) Übung
- (f) Widerspruchsbeweis: Angenommen es gäbe $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n + 1$.

$$\begin{aligned} &\stackrel{(e)}{\Rightarrow} m - n - 1 \in \mathbb{N} \wedge \underbrace{(n + 1) - m - 1}_{=n-m} \in \mathbb{N} \\ &\stackrel{(a)}{\Rightarrow} m - n - 1 \geq 0 \wedge n - m \geq 0 \\ &\stackrel{2,23}{\Rightarrow} 1 \leq m - n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

□

Aus (f) folgt insbesondere, dass

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \underbrace{1+1}_{=2}, \underbrace{2+1}_{=3}, 3+1, \dots\}.$$

11.11.2019

12.11.2019

Proposition 2.41 (Wohlordnungssatz). *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.*

Beweis. (durch Widerspruch): Sei $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Nimm weiterhin an, dass M kein Minimum besitzt (*). Setze

$$U := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist untere Schranke von } M\}.$$

Es gilt dann

- (a) $M \subseteq \mathbb{N} \stackrel{2.40(b)}{\Rightarrow} \forall m \in M : m \geq 0 \Rightarrow 0 \in U$
- (b) $U \cap M = \{n \in M : \forall m \in M : m \geq n\} = \{n \in M : n \text{ ist Minimum von } M\} \stackrel{(*)}{=} \emptyset$
- (c) $\forall n \in U, m \in M : n < m \Rightarrow \forall n \in U, m \in M : n + 1 \leq m$ (sonst $n < m < n + 1$)
 $\Rightarrow \forall n \in U : n + 1 \in U.$

Aus (a) und (c) folgt, dass U eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, also $U = \mathbb{N}$. Aus (b) folgt nun

$$M \stackrel{M \subseteq \mathbb{N}}{=} M \cap \mathbb{N} \stackrel{U = \mathbb{N}}{=} M \cap U \stackrel{(b)}{=} \emptyset,$$

also ein Widerspruch zu $M \neq \emptyset$. □

Lemma 2.42. (a) $\mathbb{N}$ ist (nach oben) unbeschränkt.

(b) (Archimedisches Prinzip):

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ mit } a \geq 0 \exists n \in \mathbb{N} : n \leq a \leq n+1$$

(c)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_+ : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Beweis. (a) Widerspruchsbeweis: Angenommen, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. Nach dem Supremumsaxiom gibt es dann ein $s = \sup \mathbb{N}$. Da s die kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - \frac{1}{2}$. Dann folgt jedoch $s < n + \frac{1}{2} < n + 1 \in \mathbb{N}$ was einen Widerspruch dazu darstellt, dass s eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ sein soll.

(b) Sei n das Minimum von $M := \{m \in \mathbb{N} : m+1 > a\}$. (Nach (a) ist $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt, also ist M nichtleer. Nach Proposition 2.41 hat M dann ein Minimum.) Es gilt nun

$$\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow n = 0 \leq a \leq n+1 \Rightarrow \text{Behauptung.} \\ n > 0 &\Rightarrow (n-1) \in \mathbb{N} \wedge (n-1) \notin M \Rightarrow \neg((n-1)+1 > a) \Rightarrow n \leq a \leq n+1 \\ &\Rightarrow \text{Behauptung.} \end{aligned}$$

(c) Wegen

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \stackrel{2.23(e)}{\Leftrightarrow} n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

folgt die Behauptung aus (b). □

Korollar 2.43. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann:

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \wedge (a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = (a; b) \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

(Zwischen allen Paaren ungleicher reeller Zahlen liegt immer sowohl eine rationale, als auch eine irrationale Zahl.)

Beweis. (Blatt 7 Aufgabe 1 a)) Wir zeigen zunächst, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ stets $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ gilt. Da $\mathbb{Q}$ weder nach oben noch nach unten beschränkt ist, existieren Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < a < b < q$. Für $\lambda \in [0, 1]$ betrachten wir die Funktion $f(\lambda) := p + \lambda(q-p)$. Die Funktion $f(\lambda)$ ist eine sog. *Konvexkombination* von p, q und wegen $q > p$ streng monoton wachsend auf $[0, 1]$. Für $\lambda \in (0, 1)$ gilt also

$$f(0) = p < f(\lambda) = p + \lambda(q-p) = (1-\lambda)p + \lambda q < f(1) = q.$$

Für $\lambda_a := \frac{a-p}{q-p}$ und $\lambda_b := \frac{b-p}{q-p}$ gilt $f(\lambda_a) = a$ und $f(\lambda_b) = b$. Für $\lambda \in (\lambda_a, \lambda_b)$ folgt dann aus der Monotonie $f(\lambda) \in (a, b)$.

Außerdem liegen $\lambda_a < \lambda_b$ im offenen Intervall $(0, 1)$. Da die Menge $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < (\min\{\lambda_a, \lambda_b - \lambda_a\})^{-1} < n$ bzw. mit $\frac{1}{n} < \min\{\lambda_a, \lambda_b - \lambda_a\}$. Weiter gibt es $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ mit

$$\frac{m}{n} < \lambda_a < \frac{m+1}{n} < \lambda_a + \frac{1}{n} \leq \lambda_a + (\lambda_b - \lambda_a) = \lambda_b.$$

Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, gilt $c_{\mathbb{Q}} := f(\frac{m+1}{n}) = p + \frac{m+1}{n}(q-p) \in \mathbb{Q}$ und $c_{\mathbb{Q}} \in (a, b)$.

Nach den obigen Überlegungen existiert ein $c_{\mathbb{Q}} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $\varepsilon = b - c_{\mathbb{Q}} > 0$. Da die Menge $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} < n$ bzw. mit $0 < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$. Dann ist $c_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} := c + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, da $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt. Weiter ist

$$a < c < c_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = c + \frac{\sqrt{2}}{n} < c + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b+c}{2} < b.$$

Also liegt $c_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ in $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

□

2.7 Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

16

Definition 2.44. Seien M, N (beliebige) Mengen.

- M heißt **endlich**, falls $M = \emptyset$ oder ein $n \in \mathbb{N}_+$ und eine bijektive Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ existieren. Die Zahl n heißt dann Mächtigkeit oder auch Elementanzahl von M . Wir schreiben $|M| := n$.
- M heißt **unendlich**, falls M nicht endlich ist. Man schreibt dann $|M| := +\infty$.
- M und N heißen **gleichmächtig**, falls eine bijektive Abbildung von M nach N existiert.
- M heißt **abzählbar**, falls M endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
- M heißt **überabzählbar**, falls M nicht abzählbar ist.

Bemerkung (Achtung: Inkonsistente Begriffsbildung in Vorlesung versus Übung!). Sei M eine nichtleere Menge.

- In Definition 2.44 wird M als abzählbar definiert, wenn M endlich ist oder eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M existiert.
- Auf Aufgabenblatt 5 wird M als abzählbar definiert, wenn eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M existiert.
- Auf Aufgabenblatt 3 (Aufgabe 8) wird M als abzählbar definiert, wenn eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M existiert.

Die Definitionen in (a) und (b) sind äquivalent, was unten bewiesen wird. Allerdings sind die Definitionen (a) und (c) nicht äquivalent! Es gilt $(c) \Rightarrow (a)$. Auch in der Literatur werden diese unterschiedlichen Bedeutungen von Abzählbarkeit verwendet. Um die Begriffe zu unterscheiden, spricht man bei (a) und (b) von **höchstens abzählbar** und bei (c) von **unendlich abzählbar**. In der Vorlesung verstehen wir unter abzählbar immer **höchstens abzählbar**.

¹⁶Die Beweise dieses Abschnittes wurden in der Globalübung besprochen.

Lemma 2.45. Seien M, N beliebige nichtleere Mengen.

- (a) Es existiert eine bijektive Abbildung von M nach N genau dann, wenn eine bijektive Abbildung von N nach M existiert.
- (b) Jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.
- (c) M ist genau dann (höchstens) abzählbar, wenn eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M existiert.
- (d) Wenn M (höchstens) abzählbar ist und eine surjektive Abbildung von M nach N existiert, dann ist auch N (höchstens) abzählbar.
- (e) Wenn N eine (höchstens) abzählbare Obermenge von M ist, dann ist auch M (höchstens) abzählbar.

Beweis. (a) Wir nehmen an, dass eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ existiert. Man kann in diesem Fall eine neue Funktion $f^{-1} : N \rightarrow M$ durch

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{falls } f(x) = y$$

definieren. Es gilt $f(f^{-1}(y)) = y$ für jedes $y \in N$ und $f^{-1}(f(x)) = x$ für jedes $x \in M$. Die Funktion f^{-1} heißt die *Umkehrfunktion* zu f und ist eine bijektive Abbildung. Die umgekehrte Richtung der Aussage folgt analog.

- (b) Wir betrachten eine unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{N}$. Wir definieren eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ rekursiv durch

$$f(0) = \min M, \quad f(n) = \min\{x \in M : x > f(n-1)\} \quad \text{falls } n \geq 1.$$

Diese Definition ist wohlgeformt, denn wegen des Wohlordnungssatzes besitzt die auftretenden Teilmengen von $\mathbb{N}$ ein (eindeutiges) Minimum. Man rechnet nach, dass f eine Bijektion ist.

- (c) ($\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass M abzählbar ist, d.h. M ist endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Wenn M eine endlich Menge ist, z.B. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, dann wird durch $f(i) = x_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $f(i) = x_1$ sonst eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M definiert, die surjektiv ist. Wenn M gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, es existiert eine bijektive (und deswegen auch surjektive) Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$.

($\Leftarrow$) Wir nehmen an, es existiert eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$. Falls M eine endliche Menge ist, haben wir nichts zu zeigen. Wenn M eine unendliche Menge ist, betrachten wir die Menge $N = \{\min f^{-1}(x) : x \in M\} \subseteq \mathbb{N}$. Diese Menge ist auch unendlich, und durch $g(x) = \min f^{-1}(x)$ wird eine bijektive Abbildung $g : M \rightarrow N$ definiert. Also sind M und N gleichmächtig. Aus (b) folgt, dass N gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Das impliziert, dass M und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, da die Komposition zweier bijektiver Funktionen auch bijektiv ist.

- (d) Wir betrachten eine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow N$. Da M abzählbar ist, folgt aus (c), dass eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow M$ existiert. Wir betrachten die Komposition $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow N$ von f und g , gegeben durch $f \circ g(n) = f(g(n))$. Die Komposition zweier surjektiver Abbildungen ist auch surjektiv. (c) impliziert, dass N abzählbar ist.

- (e) Da N abzählbar ist, folgt aus (c), dass eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow N$ existiert. Sei $x_* \in M$ beliebig aber von nun an fest gewählt. Wir definieren $g : \mathbb{N} \rightarrow M$ durch $g(n) = f(n)$, falls $f(n) \in M$ und $g(n) = x_*$ sonst. Da f surjektiv ist, ist auch g surjektiv. Wegen (c) ist M abzählbar. □

Proposition 2.46. (a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar,

(b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar,

(c) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis. (a) Wir definieren $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $f(n) = \frac{n}{2}$, wenn n gerade ist, und $f(n) = -\frac{n+1}{2}$, wenn n ungerade ist. f ist eine Bijektion, weswegen $\mathbb{Z}$ eine abzählbare Menge ist.

- (b) Als erstes zeigen wir, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Es ist einfach, die Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in einer Liste zu organisieren (siehe nachfolgendes Schema)

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (0, 3), \dots$$

	0	1	2	3	4	...
0	(0, 0) → (0, 1)	(0, 2) → (0, 3)	(0, 4) → ...			
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	...
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	...
3	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	...
4	(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Formal können wir die entsprechende Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ beschreiben durch

$$f((m, n)) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + m + 3n), \text{ wenn } m+n \text{ gerade ist,}$$

$$f((m, n)) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + 3m + n), \text{ wenn } m+n \text{ ungerade ist.}$$

Man kann nachrechnen, dass f eine bijektive Abbildung ist. Deswegen sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig. Insbesondere folgt daraus und aus a), dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (und auch die kleinere Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$) abzählbar ist. Die Abbildung $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$, die durch $g((p, q)) = \frac{p}{q}$ definiert ist, ist surjektiv. Also ist wegen Lemma 2.45 (d) auch $\mathbb{Q}$ abzählbar.

- (c) Die Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl $x \in [0, 1)$ ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_+ \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, so dass

$$x = a(1) \cdot 10^{-1} + a(2) \cdot 10^{-2} + a(3) \cdot 10^{-3} + \dots,$$

Wir benutzen auch die folgende Schreibweise $x = 0.a(1)a(2)a(3)\dots$ (Wir werden später Summen mit unendlich vielen Summanden genauer untersuchen und feststellen, dass die obige Summe wohldefiniert ist.)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ die Teilmenge aller reellen Zahlen in $[0, 1)$ deren Dezimalbruchdarstellung nur die Werte 0 und 1 enthält,

$$M = \{x = 0.a(1)a(2)a(3)\dots \mid a : \mathbb{N}_+ \rightarrow \{0, 1\}\}.$$

Die Elemente dieser Menge sind eindeutig durch ihrer Dezimalbruchdarstellung bestimmt. Wir zeigen, dass M überabzählbar ist. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ eine beliebige Abbildung. Also haben wir für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$f(i) = x_i = 0.a_i(1)a_i(2)a_i(3)\dots,$$

wobei $a_i : \mathbb{N}_+ \rightarrow \{0, 1\}$. Wir definieren eine Abbildung $b : \mathbb{N}_+ \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$b(i) \neq a_{i-1}(i), \quad \forall i \in \mathbb{N}_+.$$

Daraus folgt, für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$x := 0.b(1)b(2)b(3)\dots \neq f(i).$$

Aber $x \in M$ und deswegen kann f nicht surjektiv sein. Da also $M \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar ist, folgt die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ aus Lemma 2.45 (e). □

3 Konvergenz von Folgen

Definition 3.1 (Folge, reelle Folge). *Sei M eine beliebige, nichtleere Menge. Ein Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M heißt **Folge in M** . Eine Folge in $\mathbb{R}$ heißt **reelle Folge** oder **reelle Zahlenfolge**.*

Bemerkung 3.2. 1. *In der Regel werden in der Analysis Folgen nicht mit $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ beschrieben, sondern mit*

$$(3.1) \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

bezeichnet, wobei hiermit die Folge gemeint ist, die durch die Abbildung $f(n) := x_n$ definiert wird. Die Schreibweise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ bedeutet, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M bezeichnet.¹⁷

2. x_n heißt n -tes Folgenglied.

¹⁷Statt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird häufig auch die Schreibweise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verwendet

3. Häufig fängt der Index nicht bei 0 sondern bei 1 oder einer anderen natürlichen Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ an. Schreibweise $(x_n)_{n \geq n_0}$.

Beispiele 3.3 (Beispiele für reelle Folgen). Wir betrachten nachfolgende Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$:

(a) (eine konstante Folge). Sei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Setze $x_n := c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) (eine alternierende Folge). Setze $x_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $x_n := \frac{n}{2}$.

(d) $x_n := \frac{n}{2}(-1)^n$

(e) $x_n := \frac{5}{n+1}(-1)^n$

(f) $x_n := \frac{n}{2}(\frac{99}{100})^n$

Die Folgen sind in Abbildung 2 dargestellt. Wir interessieren uns in diesem Kapitel vor allem für das Verhalten der “späten” Folgenglieder, d.h. x_n für immer größer werdende $n \in \mathbb{N}$. Durch betrachten von Abbildung 2 haben wir folgende Vermutungen:

- Bei der Folge aus (a) sind alle Folgenglieder gleich der Konstanten c .
- Bei der Folge aus (e) scheinen sich die Folgenglieder der 0 anzunähern.
- Bei den Folgen aus (b), (d), (e) wechselt das Vorzeichen.
- Bei den Folge aus (c) und auch (f)? scheinen die Folgenglieder immer größer zu werden.
- Bei der Folge aus (d) scheint der Betrag der Folgenglieder immer größer zu werden.

Abbildungen wie 2 können eine falsche Vorstellung vermitteln, wie sich späte Folgenglieder verhalten, denn solche Abbildungen können immer nur endliche Abschnitte der Folge darstellen. Zum Beispiel zeigt Abbildung 3 einen größeren Abschnitt der Folge aus (f) und wir vermuten nun, dass diese eher gegen 0 strebt.

12.11.2019

18.11.2019

Beispiel 3.4 (Zwei Folgen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Durch

$$x_n := \begin{cases} ((-1)^{\frac{n}{2}}, 0) & n \text{ ist gerade,} \\ (0, (-1)^{\frac{n-1}{2}}) & n \text{ ist ungerade,} \end{cases}, \quad y_n := \begin{cases} (\frac{1}{n}(-1)^{\frac{n}{2}}, 0) & n \text{ ist gerade,} \\ (0, \frac{1}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}) & n \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

werden zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert. Man sieht anhand der gegebenen Beispiele reeller Folgen, dass x_n alternierend die Punkte $(\pm 1, 0)$, und $(0, \pm 1)$ durchwandert, während y_n sich dem Punkt $(0, 0)$ nähert.

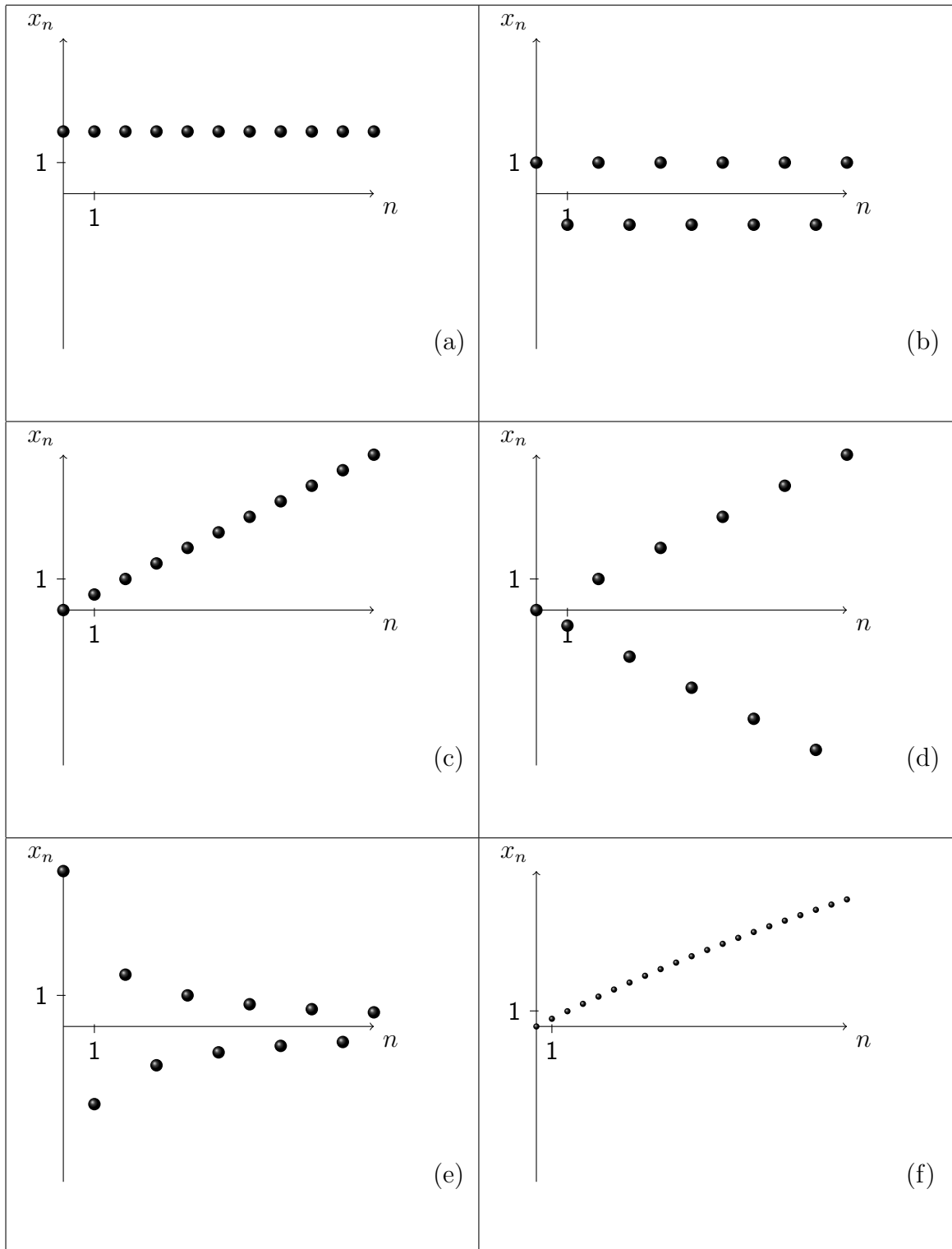


Abbildung 1: Darstellung der Folgen aus Beispiel 3.3

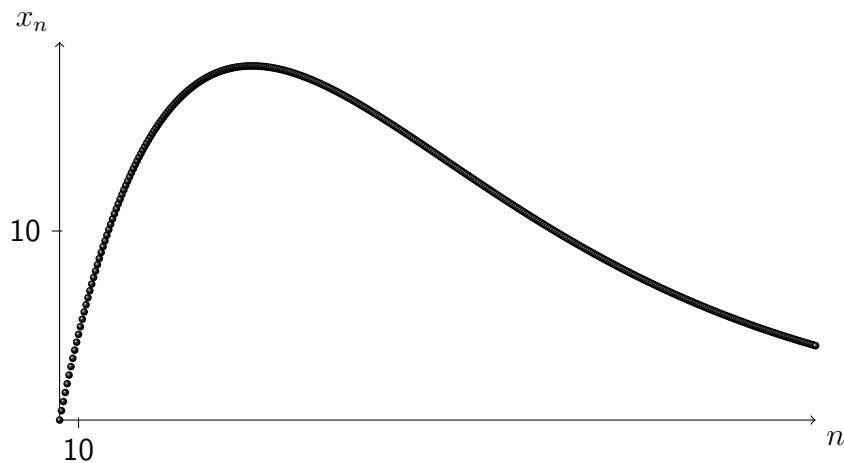


Abbildung 2: Folge aus Beispiel (f).

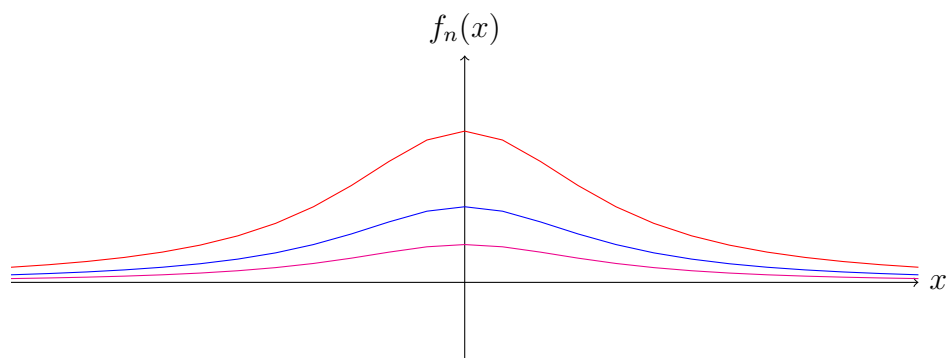


Abbildung 3: Die Abbildung $f_n(x) = 2^{-n} \frac{1}{x^2+1}$ für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$

Beispiel 3.5 (Funktionsfolgen). *Ein wichtiges Beispiel für Folgen (insbesondere für fortgeschrittenere Inhalte) sind Funktionsfolgen. Als Beispiel betrachten wir dazu die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,*

$$\mathcal{F} := \{ f : f \text{ ist Abbildung von } \mathbb{R} \text{ nach } [0, 1] \}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], & f_n(x) &:= 2^{-n} \frac{1}{x^2 + 1} \\ g_n : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], & g_n(x) &:= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann sind $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{F}$. Ein weiteres Element in $\mathcal{F}$ ist die Null-Funktion $x \mapsto 0$. Die Abbildungen 3 und 4 zeigen, dass für größer werdendes n die Funktionen f_n sich der Null-Funktion annähern (in welchem Sinne?). Ebenso nähern sich die Funktionen g_n der Null-Funktion an (in welchem Sinne?).

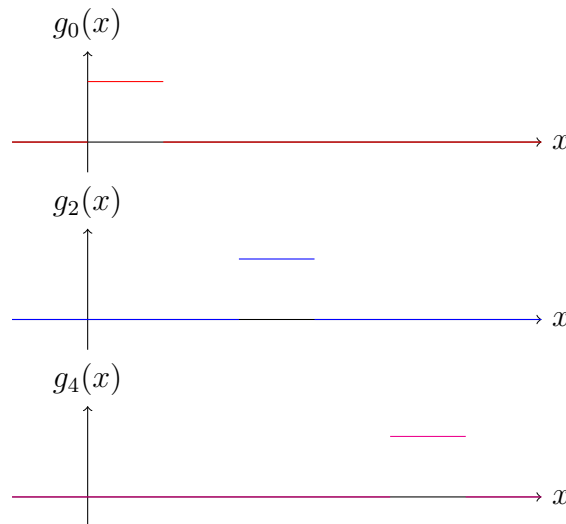


Abbildung 4: Die Abbildung g_n für $n = 0$, $n = 2$ und $n = 4$

In der Diskussion der obigen Beispiele haben wir Formulierungen wie “annähern” oder “gegen etwas streben” verwendet. Diese Formulierungen setzen voraus, dass wir eine Vorstellung von Abstand oder Distanz für die betrachteten Objekte haben.

- Beispiel 3.6.** (a) (in $\mathbb{R}$): Welche der Zahlen $a = 0$, $b = 1$, $c = 100$ haben den geringsten Abstand zueinander?
- (b) (in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$): Welche der Punkte $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (1, 2)$ haben den geringsten Abstand zueinander?
- (c) (in der Menge der Wörter): Welche der Wörter $a = \text{TIER}$, $b := \text{STIER}$, $c := \text{TOR}$ haben die geringste Distanz zueinander?

3.1 Metrische Räume

Definition 3.7 (Metrik, metrischer Raum). Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** oder **Abstand** auf M , falls gelten

(i) (positiv definit)

$$\forall x, y \in M : \quad d(x, y) \geq 0 \quad \wedge \quad (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$$

(ii) (Symmetrie)

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$$

(iii) (Dreiecksungleichung)

$$\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Ein Tupel (M, d) , bestehend aus einer Menge M und einer Metrik d auf M wird **metrischer Raum** genannt.

Wichtigstes Beispiel für eine Metrik ist:

Lemma 3.8 (Abstand auf $\mathbb{R}$). Auf $\mathbb{R}$ wird durch

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

eine Metrik definiert. Man nennt $d(x, y) = |x - y|$ den **Abstand** der Punkte x und y . Falls nichts anderweitiges angegeben wird, betrachten wir $\mathbb{R}$ immer zusammen mit dem Abstand als Metrik.

Beweis. (folgt direkt aus Lemma 2.26). Es gilt insbesondere

$$d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

□

Beispiel 3.9. Wir betrachten Beispiel 3.6

(a) Für die Abstände gilt $d(a, b) = |0 - 1| = 1$, $d(a, c) = |0 - 100| = 100$, $d(b, c) = |1 - 100| = 99$.

(b) Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

eine Metrik definiert — die sogenannte Manhattan-Metrik (siehe Übung). Es gilt dann

$$\begin{aligned} d(a, b) &= |0 - 1| + |0 - 0| = 1, \\ d(a, c) &= |0 - 1| + |0 - 2| = 1 + 2 = 3, \\ d(b, c) &= |1 - 1| + |0 - 2| = 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

(c) Auf der Menge M aller Wörter (ein Wort := endliche Sequenz von Buchstaben) kann eine Metrik wie folgt definiert werden. Zunächst stellt man fest, dass man ein Wort in ein anderes Wort überführen kann, indem eine endliche Anzahl von Schritten durchführt, wobei in jedem Schritt genau eine der nachfolgenden Wort-Manipulation durchgeführt werden darf:

- Ein Buchstabe wird durch einen andere ersetzt.
- Ein Buchstabe wird gelöscht.
- Ein Buchstabe wird hinzugefügt.

Um von Tier nach Tor zu kommen, könnte man folgende Schritt durchführen,

$$TIER \rightarrow STIER \rightarrow STIR \rightarrow STOR \rightarrow TOR,$$

oder $TIER \rightarrow TER \rightarrow TOR$. Ein Abstand zweier Wörter kann nun als die minimale Schrittzahl definiert werden, die man braucht um das eine Wort in das andere zu überführen. Beispielsweise haben TIER und TOR den Abstand 2, während TIER und STIER den Abstand 1 haben. Durch diesen Abstandsbegriff wird eine Metrik auf M definiert, die sogenannte Levenshtein-Distanz. Diese (bzw. Varianten) kommen z.B. bei Autokorrektur, Rechtschreibprüfung usw. zur Anwendung.

(d) Sei M eine beliebige, endliche, nichtleere Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

wird eine Metrik—die sogenannte diskrete Metrik eingeführt.

Definition 3.10 (Offene und abgeschlossene Kugel; Umgebung). Sei (M, d) ein nicht-leerer, metrischer Raum. Sei $x \in M$ und $r > 0$. Die Menge

$$B(x; r) := \{ y \in M : d(x, y) < r \}$$

heißt **offene Kugel** mit **Mittelpunkt** x und **Radius** r . Die Menge

$$K(x; r) := \{ y \in M : d(x, y) \leq r \}$$

heißt **abgeschlossene Kugel** mit Mittelpunkt x und Radius r . Für $\varepsilon > 0$ heißt $B(x; \varepsilon)$ auch **ε -Umgebung** von x . Jede Obermenge einer ε -Umgebung von x wird Umgebung von x genannt.

Lemma 3.11 (Kugel versus Intervall). Für alle $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ gilt

$$B(x; r) = (x - r, x + r), \quad K(x; r) = [x - r, x + r].$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} y \in B(x; r) &\Leftrightarrow |y - x| < r \Leftrightarrow \max\{x - y, y - x\} < r \\ &\Leftrightarrow (x - y < r) \wedge (y - x < r) \Leftrightarrow x - r < y < x + r \Leftrightarrow y \in (x - r, x + r). \end{aligned}$$

Das Argument für die zweite Behauptung erfolgt analog, wobei $<$ durch $\leq$ ersetzt werden muss. $\square$

Beispiel 3.12. Wir betrachten $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Manhattan-Metrik, dann gilt

$$B(0; 1) = \{ a = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1| + |x_2| < 1 \}.$$

3.2 Konvergente Folgen

Wir möchten nun den Konvergenzbegriff für Folgen einführen und betrachten nochmals die durch $x_n := \frac{1}{n}$ definierte Folge. Wir haben intuitiv festgestellt, dass diese für größer werdende n gegen 0 strebt. Für den Konvergenzbegriff ändert man die Perspektive: Wir betrachten eine kleine Kugel um die 0 und überprüfen, ob alle späten Folgenglieder in dieser Kugel liegen. Sei z.B. ein (beliebig kleines) $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $|x_n| = \frac{1}{n}$ gilt, $|x_n - 0| \leq \frac{1}{n}$. Ausserdem finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedisches Prinzip) und damit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt also¹⁸

$$\forall n \geq n_0 : x_n \in B(0, \varepsilon).$$

¹⁸Die Schreibweise $\forall n \geq n_0$ meint genauer: $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Ebenso meint später die Schreibweise $\varepsilon > 0$ genauer, dass $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Aus dem Kontext wird klar, was gemeint ist.

Da hierbei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, haben wir gezeigt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in B(0, \varepsilon).$$

(Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen alle hinreichend späten Folgenglieder x_n in der ε -Kugel $B(0; \varepsilon)$ um die 0.)

18.11.2019

19.11.2019

Definition 3.13 (konvergente Folge, Grenzwert). Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M heißt **konvergent** (in (M, d)), falls $a \in M$ existiert, so dass das Folgende gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_n \in B(a; \varepsilon) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wir nennen dann a den **Grenzwert** (oder **Limes**) der Folge und sagen, dass die Folge gegen a (in (M, d)) konvergiert.

(b) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.

Lemma 3.14. Eine konvergente Folge in einem metrischen Raum besitzt **genau einen** Grenzwert.

Beweis. Seien a, b Grenzwerte einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (M, d) . Nimm weiterhin an dass $a \neq b$, dann gilt

$$\varepsilon := d(a, b) > 0.$$

Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowohl gegen a , als auch gegen b konvergiert, existieren $n_0, \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \forall n \geq \tilde{n}_0 : d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

also

$$\begin{aligned} \forall n \geq \max\{n_0, \tilde{n}_0\} : \varepsilon = d(a, b) &\stackrel{\Delta-Ug}{\leq} d(x_n, a) + d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon &\Rightarrow \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

□

Aufgrund dieses Lemmas ist es sinnvoll, von **dem** Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu sprechen.

Schreibweisen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{oder auch} \quad x_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Korollar 3.15 (Konvergenz einer reellen Folge). Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Beweis. Folgt direkt aus Definition 3.13 und $x_n \in B(a; \varepsilon) \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. $\square$

Bemerkung 3.16. 1. In der Analysis I werden wir uns fast ausschliesslich mit der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ beschäftigen. In der Analysis II dann in allgemeinen metrischen Räumen und insbesondere in $\mathbb{R}^n$ und einfachen Funktionenräumen.

2. Nachfolgend sollen unter anderem **Eigenschaften** konvergenter Folgen, **Rechenregeln** für konvergente Folgen sowie **Kriterien** für die Konvergenz / Divergenz von Folgen untersucht werden.

3.3 Eigenschaften konvergenter Folgen

Definition 3.17. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (M, d) .

(a) Die Folge heisst **beschränkt**, falls $a \in M$ und $r > 0$ existieren, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in B(a; r).$$

(b) Die Folge heisst **Cauchyfolge**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Lemma 3.18. Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist **genau dann** beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Beweis. (Blatt 7 Aufgabe 6) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt im Sinne von Definition 3.17, d.h.

$$\exists a \in \mathbb{R} \exists r > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in B(a; r) = (a - r, a + r).$$

Hieraus folgt: $\forall n \in \mathbb{N} : a - r < x_n < a + r$, d.h., $M := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt im Sinne von Definition 2.30.

Sei nun $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt im Sinne von Definition 2.30. Dann existieren $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : r_1 \leq x_n \leq r_2$. Sei $r := \max\{|r_1|, |r_2|\} + 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| = \begin{cases} x_n & \text{für } x_n \geq 0, \\ -x_n & \text{für } x_n < 0, \end{cases} \leq \begin{cases} r_2 & \text{für } x_n \geq 0, \\ -r_1 & \text{für } x_n < 0, \end{cases} \leq \begin{cases} |r_2| & \text{für } x_n \geq 0, \\ |r_1| & \text{für } x_n < 0, \end{cases} < r.$$

Somit folgt $x_n \in B(0; r)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt im Sinne von Definition 3.17. $\square$

Satz 3.19 (Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy). Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Dann gilt

(a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

Beweis. Es sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(a) Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Dann

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} : |x_m| &\leq \begin{cases} \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0}|\} & \text{falls } m \leq n_0 \\ \underbrace{|x_m - a|}_{\leq 1 \text{ für } m > n_0} + |a| & \text{falls } m > n_0 \end{cases} \\ &< \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0}|\} + 1 + |a| =: r \\ \Rightarrow \quad x_m &\in B(0; r) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann gilt für alle $n, m \geq n_0$:

$$|x_n - x_m| \stackrel{\Delta\text{-Ug.}}{\leq} \underbrace{|x_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_m - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

□

Bemerkung. Im weiteren Verlauf sollen unter anderem die folgenden Resultate (in vollständigen metrischen Räumen) formuliert werden:

- Cauchyfolge $\Rightarrow$ konvergente Folge
- beschränkte Folge $\Rightarrow$ konvergente Teilfolge
- beschränkte monotone Folge $\Rightarrow$ konvergente Folge

3.4 Rechnen mit Folgen

Satz 3.20 (Rechenregeln). Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle konvergente Folgen. Dann:

(a) $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(b) $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

(c) Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt und $(\frac{1}{x_n})_{n \geq n_0}$ konvergent ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

(d) Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$. Dann ist $(\frac{y_n}{x_n})_{n \geq n_0}$ (mit geeignetem $n_0 \in \mathbb{N}$) konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{x_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

(e) Sei $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\underbrace{|x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann folgt

$$|x_n + y_n - (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)| \leq |x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n| + |y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$.

(b) (*Hausaufgabe, Blatt 7 Aufgabe 7*) Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent sind, sind sie auch beschränkt, d.h. $\exists r > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < r, |y_n| < r$. Weiter sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Gegeben sei ein $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2(|y| + 1)} \forall n \geq n_1 \text{ und } |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2r} \forall n \geq n_2.$$

Für $z_n := x_n \cdot y_n$, $z = x \cdot y$ und alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ folgt

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |x_n y_n - xy| = |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| < r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} + |y| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y| + 1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

(c) Setze $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}|a|$ und wähle $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq \tilde{n}_0 : |x_n - a| < \varepsilon_0.$$

Für $n \geq \tilde{n}_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{2}|a| \leq \frac{1}{2} \underbrace{|a - x_n|}_{< \varepsilon_0} + \frac{1}{2}|x_n| \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_0 &\leq \frac{1}{2}|x_n| \\ \Rightarrow |x_n| &\geq \varepsilon_0 \\ \Rightarrow x_n &\neq 0. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für $n \geq \tilde{n}_0$

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x_n}{ax_n} \right| = \underbrace{\frac{|a - x_n|}{|a|}}_{=2\varepsilon_0} \underbrace{\frac{1}{|x_n|}}_{\geq \varepsilon_0} \leq \frac{1}{2\varepsilon_0^2} |a - x_n|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle dann $n_0 \geq \tilde{n}_0$, sodass $|a - x_n| < 2\varepsilon_0^2 \cdot \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon.$$

(d) Folgt aus (b) und (c):

$$\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n} \xrightarrow{(b)} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \stackrel{(c)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

(e) Setze $z_n := y_n - x_n$, dann gilt $z_n \geq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Es genügt also zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \geq 0$.

Angenommen es gelte $c := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n < 0$. Setze $\varepsilon := |c| = -c > 0$ (*) und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|z_n - c| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\forall n \geq n_0 : z_n = z_n - c + c \leq |z_n - c| + c \leq \frac{\varepsilon}{2} + c \stackrel{(*)}{=} \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} < 0,$$

was einen Widerspruch zu $z_n \geq 0$ darstellt.

□

Bemerkung. (a) Aus $x_n > y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt **nicht** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Betrachte hierzu beispielhaft die Folgen

$$x_n := \frac{1}{n}, \quad y_n := 0.$$

(b) Durch Iteration dieser Rechenregeln lassen sich auch algebraische Ausdrücke von Folgen untersuchen, wie z.B.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{n} \right) = \prod_{i=1}^k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = \prod_{i=1}^k 0 = 0.$$

3.5 Konvergenzkriterien

Lemma 3.21 (Einschließungskriterium). Seien (x_n) , (y_n) und (z_n) reelle Folgen mit $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(insbesondere ist also auch (y_n) konvergent).

Beweis. Setze $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\max\{|x_n - a|, |z_n - a|\} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

(Da sowohl (x_n) als auch (z_n) gegen a konvergieren, gibt es $\tilde{n}_0, \bar{n}_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq \tilde{n}_0$ und $|z_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq \bar{n}_0$. Setze dann $n_0 := \max\{\tilde{n}_0, \bar{n}_0\}$.)

Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$-\varepsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

□

Beispiel.

$$\underbrace{0}_{\rightarrow 0} \leq \frac{1}{n^2 + n + 1} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\rightarrow 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2 + n + 1} \rightarrow 0$$

Definition 3.22 (monotone Folge). Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- **monoton wachsend**, wenn $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **streng monoton wachsend**, wenn $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **monoton fallend**, wenn $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **streng monoton fallend**, wenn $x_n > x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **(streng) monoton**, wenn sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Bemerkung. Man verwende anstelle von

$$\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \max\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

die Schreibweisen

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \quad \text{und} \quad \max_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

(äquivalent für inf und min)

Satz 3.23 (Konvergenz von monotonen Folgen). Jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte, monoton wachsende (bzw. fallende) reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n & \text{falls } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton wachsend} \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n & \text{falls } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton fallend.} \end{cases}$$

Beweis. (1) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann setze $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Da a Supremum ist existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, mit $|x_{n_0} - a| < \varepsilon$. Aufgrund der Monotonie von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt nun $x_n \geq x_{n_0} \geq a - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Zusammen mit der Beschränktheit (also $a \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$) folgt dann $x_n \in B(a; \varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

- (2) Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann ist $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Insbesondere gilt dann $a := \inf_{n \in \mathbb{N}}(x_n) = -\sup_{n \in \mathbb{N}}(-x_n)$. Aus (1) folgt, dass $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sup_{n \in \mathbb{N}}(-x_n) = -a$ konvergiert, nach Satz 3.20 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -(-a) = a.$$

□

Beispiel 3.24 (Berechnung der Quadratwurzel). Gegeben sei $a > 0$. Für einen Startwert $x_0 > 0$ definieren wir rekursiv die Folge

$$(3.2) \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_+.$$

Wir behaupten, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Beweis:

1. Es gilt: $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Das zeigt man leicht mittels Induktion).
2. Es gilt: $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. In der Tat, gilt

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 2a + \left(\frac{a}{x_n} \right)^2 \right) - a = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 \geq 0$$

3. Es gilt: $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$:

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 - a) \geq 0.$$

4. Die Folge ist monoton fallend wegen 3., und nach unten beschränkt wegen 2. Aus Satz 3.23 folgt nun, dass die Folge konvergent ist. Sei $b \in \mathbb{R}$ ihr Grenzwert. Es gilt (wegen Satz 3.20 e) $b \geq \sqrt{a}$. Mit den Rechenregeln aus Satz 3.20 folgt, dass die Folge $y_n := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ gegen $\frac{1}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right)$ konvergiert. Durch Übergang zum Grenzwert auf beiden Seiten von (3.2), folgt $b = \frac{1}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right)$. Auflösen nach b liefert $b^2 = a$, und da $b \geq \sqrt{a}$ gilt, folgt $b = \sqrt{a}$. □

Definition 3.25 (Uneigentliche Konvergenz/bestimmte Divergenz). Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- **uneigentlich konvergent gegen** $+\infty$, falls es zu jedem $C > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \geq C$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Schreibe dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

- **uneigentlich konvergent gegen** $-\infty$, falls $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uneigentlich konvergent gegen $+\infty$ ist. Schreibe dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

In beiden Fällen heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uneigentlich konvergent* und ∞ (bzw. $-\infty$) *uneigentlicher Grenzwert*.

Satz 3.26. *Jede monotone reelle Folge ist entweder konvergent oder uneigentlich konvergent.*

Beweis. (Blatt 8 Aufgabe 4) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone reelle Folge.

Fall 1: Die Folge ist beschränkt. In diesem Fall folgt aus Satz 3.23. die Konvergenz der Folge.

Fall 2: Die Folge ist unbeschränkt. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

Fall 2a: Die Folge ist monoton wachsend. Dann ist sie nach unten durch x_0 beschränkt und folglich muss Sie nach oben unbeschränkt sein. Wir beweisen nun, dass die Folge uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert, d.h.

$$(3.3) \quad \forall C > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n > C.$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass die Verneinung von (3.3) wahr ist, also:

$$(3.4) \quad \exists C > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : x_n \leq C.$$

Da die Folge monoton wachsend ist folgt nun $x_{n_0} \leq x_n \leq C$. Damit haben wir $\forall n_0 \in \mathbb{N} x_{n_0} \leq C$. Damit ist aber die Folge nach oben beschränkt. Da wir bereits wissen, dass die Folge nach unten beschränkt ist, folgt dass die Folge beschränkt ist — ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall 2b: Die Folge ist monoton fallend. In diesem Fall folgt die Behauptung durch Anwendung von Fall 2a auf die beschränkte, monoton wachsende Folge $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Definition 3.27 (Teilfolge). *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge M . Ist $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge (also $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$) in $\mathbb{N}$, so heißt die Folge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ **Teilfolge** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Beispiel 3.28. • Betrachte die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = (-1)^n$. Es wurde bereits gezeigt, dass diese Folge divergent ist. Betrachte nun die Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k$, dann gilt $x_{n_k} = (-1)^{2k} = \underbrace{((-1)^2)^k}_{=1} = 1$, also ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

- Jede Folge ist eine Teilfolge von sich selbst. (Wähle $n_k = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.)
- Sei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Dann gilt

$$(3.5) \quad \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n_k$$

(Beweis mittels Induktion.)

Lemma 3.29. *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge in einem metrischen Raum ist ebenfalls konvergent und konvergiert gegen denselben Grenzwert.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (M, d) . Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt für $k \geq n_0$ nach 3.5 auch $n_k \geq k \geq n_0$, also $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. $\square$

Lemma 3.30. *Jede reelle Folge hat eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Der Motivation des Beweises diene zunächst die folgende Beobachtung

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist mon. fallend} \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} : \underbrace{(\forall \ell \geq n : x_n \geq x_\ell)}_{\text{alle späteren } x_\ell \text{ sind nicht größer}}\} = \mathbb{N}$$

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$. Betrachte

$$M := \{n \in \mathbb{N} : (\forall \ell \geq n : x_n \geq x_\ell)\}$$

und unterscheide die folgenden beiden Fälle.

Fall 1: M ist unendlich.

Schreibe dann M in der Form $M = \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$, mit $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$. Dies geschieht durch die folgende rekursive Definition:

$$M_0 := M, \quad n_0 := \min(M_0) \text{ (existiert nach Satz 2.41 (Wohlordnungssatz))}$$

und für $k \in \mathbb{N}_+$

$$M_k := M_{k-1} \setminus \{n_{k-1}\}, \quad n_k := \min(M_k).$$

Mittels Induktion kann nun gezeigt werden, dass $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist. (Hierbei stellt man fest, dass $M_k \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}_+$, was aus der Eigenschaft folgt, dass M unendlich ist). Wir folgern, dass $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge ist. Weiter folgt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n_k \in M \text{ und } \forall \ell \geq k : n_\ell \geq n_k &\stackrel{\text{Def. } M}{\Rightarrow} x_{n_k} \geq x_{n_\ell} \text{ für alle } \ell \geq k \\ &\Rightarrow (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist monoton fallend.} \end{aligned}$$

Fall 2: M ist endlich.

Wir stellen zunächst fest (wobei wir benutzen, dass $\mathbb{N} \setminus M$ unendlich ist), dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus M$ die Aussage

$$\exists \ell \geq n : x_n < x_\ell,$$

und damit

$$(3.6) \quad \{\ell \in \mathbb{N} : \ell \geq n \text{ und } x_n < x_\ell\} \neq \emptyset,$$

gilt. Definiere nun $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie folgt rekursiv:

$$\begin{aligned} n_0 &:= \begin{cases} \max(M) + 1 & \text{falls } M \text{ endlich und } M \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } M = \emptyset \end{cases} \\ M_0 &:= \{\ell \in \mathbb{N} : \ell > n_0 \text{ und } x_{n_0} < x_\ell\} \end{aligned}$$

und für $k \in \mathbb{N}_+$

$$(3.7) \quad n_k := \inf(M_{k-1}), \quad M_k := \{\ell \in \mathbb{N} : \ell > n_k \text{ und } x_{n_k} < x_\ell\}.$$

Man kann mittels Induktion zeigen, dass $M_k \neq \emptyset$ (Hier benutzt man 3.6. Außerdem gilt dann $\inf = \min$ in 3.7), und somit $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$ und $x_{n_{k-1}} < x_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$).

Damit ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Teilfolge.

□

Satz 3.31 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Aus Lemma 3.30 folgt die Existenz einer monotonen Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Aus

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} x_{n_k} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} x_{n_k} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

und der Beschränktheit von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt, dass $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Aus Satz 3.23 folgt nun, dass $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. □

Bemerkung. *Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist eine zentrale Aussage bei der Untersuchung von Konvergenzeigenschaften von Folgen. Es ist oft einfach zu überprüfen, ob eine Folge beschränkt ist, jedoch ist es im Allgemeinen schwierig die Konvergenz zu zeigen. Falls letzteres mithilfe der $\varepsilon - n_0$ -Technik geschehen soll, muss zudem noch der Grenzwert im voraus bekannt sein, beziehungsweise "geraten" werden. Mithilfe der Resultate 3.30 und 3.31 hingegen folgt aus Beschränktheit sofort Konvergenz, zumindest für eine Teilfolge. In vielen Fällen ist bereits dies eine nützliche Information für weitere Untersuchungen.*

Definition 3.32 (Häufungspunkt). *Sei (M, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . $a \in M$ heißt **Häufungspunkt von** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.*

Beispiel 3.33. • *Der einzige Häufungspunkt einer konvergenten Folge ist ihr Grenzwert (folgt aus Lemma 3.29). Die Umkehrung gilt jedoch nur für beschränkte Folgen (s. Übung).*

- Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k} \quad \text{und} \quad -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k+1}$$

- Wegen Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungspunkt.
- Aus Satz 3.23 folgt, dass jede monotone Folge **höchstens** einen Häufungspunkt besitzt.

Satz 3.34 (Cauchy-Kriterium/Vollständigkeit von $\mathbb{R}$). *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Schritt 1: Behauptung: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Begründung: Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall m, n \geq n_0 : |x_n - x_m| < 1$. Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$|x_k| \leq \begin{cases} \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0}|\}, & k \leq n_0 \\ \underbrace{|x_k - x_{n_0}|}_{\leq 1} + |x_{n_0}|, & k > n_0 \end{cases} \leq \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0}|\} + 1 =: C < \infty$$

also auch

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq C < \infty.$$

Schritt 2: Beh.: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \text{ ist Häufungspunkt} \Rightarrow a \text{ ist Grenzwert}$$

Begr.: Sei $a := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also Grenzwert einer Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } k \geq \tilde{n}_0 \quad \text{und} \quad |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq \tilde{n}_0$$

Setze $n_0 := n_{\tilde{n}_0} \geq \tilde{n}_0$. Dann gilt für alle $k \geq n_0$

$$k \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq k \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Außerdem folgt

$$\begin{aligned} k, n_k \geq n_0 \geq \tilde{n}_0 &\Rightarrow |x_{n_k} - x_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow |x_k - a| \stackrel{\Delta\text{-Ug.}}{\leq} |x_{n_k} - x_k| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{aligned}$$

Schritt 3: Wegen Schritt 1 ist die Folge beschränkt, nach Bolzano-Weierstraß besitzt sie also einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$. Aus Schritt 2 folgt dann, dass a Grenzwert der Folge ist. $\square$

Bemerkung 3.35. • Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

- Anstatt des Supremumsaxioms können das Archimedische Prinzip (Lemma 2.42) und Satz 3.34 als Axiom für die Charakterisierung der reellen Zahlen verwendet werden.

3.6 Limes inferior und superior

Motivation:

- Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge ist, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann liegen für jedes $\varepsilon > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n in einer ε -Umgebung von a .
- Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hingegen nicht gegen a konvergiert dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass unendlich viele Folgenglieder außerhalb von $B(a; \varepsilon)$ liegen.
- Ziel ist es nun, für eine beliebige reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Intervall $[a_-, a_+]$ minimaler Größe zu finden, sodass für alle $\varepsilon > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder in $[a_- - \varepsilon, a_+ + \varepsilon]$ liegen.

Beobachtung: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge in $\mathbb{R}$ und betrachte

$$y_n := \sup_{k \geq n} x_k = \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

Dann kann unter den folgenden Fällen unterschieden werden:

Fall 1: Es gilt $y_n = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (dann gilt $y_n = \infty$ sogar für *alle* $n \in \mathbb{N}$). Dann ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt.

Fall 2: Es gilt $y_n < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (dann gilt $y_n < \infty$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$). Dann ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Außerdem gilt $\{x_k : k \geq n\} \subseteq \{x_k : k \geq n-1\}$ woraus folgt, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Aus Satz 3.26 folgt dann, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entweder konvergent gegen ein $y \in \mathbb{R}$, oder uneigentlich konvergent gegen $-\infty$ ist.

Definition 3.36 (liminf, limsup). Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Definiere dann den **Limes superior** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k) & \text{falls } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach oben beschränkt} \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere weiterhin den **Limes inferior** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k) & \text{falls } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 3.37. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Ebenso gibt es eine Teilfolge, die gegen $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ konvergiert.

Beweis. Setze $a := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Unterscheide dann die folgenden Fälle

(1): $a \in \mathbb{R}$. Zeige zunächst, dass für alle $m, k \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\left\{ \ell \in \mathbb{N}_+ : \ell > m \wedge |x_\ell - a| < \frac{1}{k} \right\} \neq \emptyset. \quad (*)$$

Begr.: Es gilt nach Definition des limsup, dass $\sup_{\ell \geq n} x_\ell \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), also

$$\exists n_1 > m : \left| \sup_{\ell \geq n_1} x_\ell - a \right| < \frac{1}{2k}.$$

Nach Definition des Supremums gilt dann

$$\begin{aligned} & \exists n_2 > n_1 : |x_{n_2} - \sup_{\ell \geq n_1} x_\ell| < \frac{1}{2k} \\ \Rightarrow & n_2 > m \wedge |x_{n_2} - a| < |x_{n_2} - \sup_{\ell \geq n_1} x_\ell| + \left| \sup_{\ell \geq n_1} x_\ell - a \right| < \frac{1}{k} \end{aligned}$$

also gilt (*).

Definiere nun rekursiv

$$n_0 := 0; \quad n_{k+1} := \min \left\{ \ell \in \mathbb{N} : \ell > n_k \wedge |x_\ell - a| < \frac{1}{k} \right\}$$

Nach (*) gilt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und per Konstruktion ist die Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strikt monoton wachsend. Weiterhin gilt $|x_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ also ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit Grenzwert a .

(2): $a = +\infty$. Konstruiere, ähnlich wie im ersten Fall, eine Teilfolge, die uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert. (Details siehe Übung)

(3): $a = -\infty$. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $-\infty$ uneigentlich konvergent, denn

$$x_n \leq \sup_{k \geq n} x_k \rightarrow -\infty.$$

Die Aussage für $\liminf$ wird analog gezeigt. □

Lemma 3.38 (größter/kleinsten Häufungspunkt). *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reell und beschränkt und setze*

$$H := \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Dann gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min(H) \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max(H).$$

Beweis. Wegen Lemma 3.37 gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in H$, daraus folgt sofort

$$\inf(H) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup(H).$$

Es genügt daher, die umgekehrten Ungleichungen zu zeigen. Beweise hier lediglich $a := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \sup(H)$, die Aussage für $\liminf$ wird analog gezeigt.

Es sei $b \in H$ und $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $x_{n_k} \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$). Es gilt dann per Definition

$$y := \sup_{\ell \geq n} x_\ell \rightarrow a \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

also

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{x_{n_k}}_{\leq y_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a.$$

Da $b \in H$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Lemma 3.39. *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle und beschränkte Folge. Dann:*

(a) *Für alle $\varepsilon > 0$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n im Intervall*

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon).$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Beweis. (a) (Widerspruch) Angenommen es gäbe ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : x_n \notin (\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon) \right\}$$

unendlich ist. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

- (i) $x_{n_k} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ oder
- (ii) $x_{n_k} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

o.B.d.A. gelte (i). Wegen Bolzano-Weierstraß (Satz 3.31) gibt es dann eine Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_{k_\ell}} \rightarrow a$. Aus (i) folgt nun

$$a \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon = \min(H) - \varepsilon$$

also $a < \min(H)$ (H bezeichnet dabei die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, siehe Lemma 3.38), was einen Widerspruch zu $a \in H$ darstellt.

- (b) Folgt aus der Beobachtung, dass eine beschränkte Folge genau dann konvergiert, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt. □

Proposition 3.40 (Rechenregeln). *Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ und beide nach oben (oder beide nach unten) beschränkt. Dann gilt*

(a)

$$x_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$$

(b)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n) \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(c)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(d) Sei $c \in \mathbb{R}$, dann

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = \begin{cases} c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n & c \geq 0 \\ c \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n & c \leq 0 \end{cases}$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = \begin{cases} c \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n & c \geq 0 \\ c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n & c \leq 0. \end{cases}$$

Beweis. (Blatt 10 Aufgabe 1)

- (a) Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ folgt natürlich auch $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

Sei nun $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|x_j| : j \geq n\} = 0$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sup\{|x_j| : j \geq n\} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, woraus $0 \leq |x_n - 0| = |x_n| \leq \sup\{|x_j| : j \geq n\} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ folgt. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

- (b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq y_n \leq \sup\{y_j : j \geq n\} =: v_n$. Wegen $x_j \leq y_j$ folgt für $j \geq n$ auch $x_j \leq y_j \leq v_n$. Damit ist v_n eine obere Schranke für alle x_j , $j \geq n$, woraus $u_n := \sup\{x_j : j \geq n\} \leq v_n$ folgt. Damit ergibt sich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Wegen $\inf A = -\sup(-A)$ für Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\sup\{-x_j : j \geq n\} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{-x_j : j \geq n\} = -\limsup_{n \rightarrow \infty}(-x_n).$$

Nun ist nach Voraussetzung $-x_n \geq -y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus nach dem ersten Teil

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty}(-x_n) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty}(-y_n) \text{ und schließlich aus (d)} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n &= -\limsup_{n \rightarrow \infty}(-x_n) \leq -\limsup_{n \rightarrow \infty}(-y_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \end{aligned}$$

folgen.

- (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq n$ gelten

$$x_n + y_n \leq \underbrace{\sup\{x_j : j \geq n\}}_{:=u_n} + y_n \leq u_n + \underbrace{\sup\{y_j : j \geq n\}}_{:=v_n} \text{ und } x_k + y_k \leq u_n + v_n.$$

Also ist

$$z_n := \sup\{x_j + y_j : j \geq n\} \leq u_n + v_n.$$

Da alle 3 Grenzwerte existieren, folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}(x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Weiter ist aus (d)

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty}(x_n + y_n) &= -\limsup_{n \rightarrow \infty} -(x_n + y_n) \geq -(\limsup_{n \rightarrow \infty} -x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} -y_n) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n. \end{aligned}$$

- (d) Sei zunächst $c \geq 0$. Dann folgen

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty}(c \cdot x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{c \cdot x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \sup\{x_k : k \geq n\} \\ &= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{und} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty}(c \cdot x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{c \cdot x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \inf\{x_k : k \geq n\} \\ &= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = c \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

Für $c < 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{c \cdot x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \inf\{x_k : k \geq n\} \\ &= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = c \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{und} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{c \cdot x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \sup\{x_k : k \geq n\} \\ &= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.\end{aligned}$$

□

Konventionen: Es gelten

$$\begin{aligned}a + (+\infty) &= +\infty + a = +\infty && \text{für } a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ a + (-\infty) &= -\infty + a = -\infty && \text{für } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ a \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty && \text{für } a > 0 \text{ oder } a = +\infty \\ a \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty && \text{für } a < 0 \text{ oder } a = -\infty\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |\pm\infty| = +\infty.$$

Nicht definiert sind hingegen

$$+\infty + (-\infty); \quad (-\infty) + (+\infty); \quad (\pm\infty) \cdot 0; \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

4 Die komplexen Zahlen

4.1 Motivation

Lösung einer kubischen Gleichung nach der Methode von *Cardano* und *Bombelli* (16. Jhd.).

Quadr. Gleichung Die Gleichung

$$(4.1) \quad x^2 + bx + c = 0$$

besitzt bekanntermaßen genau dann eine (oder zwei) reelle Lösungen $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ wenn

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0.$$

Es gilt dann

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}.$$

Ziel im 16. Jhd. war dann die Entwicklung ähnlicher Formeln zur Lösung (spezieller) kubischer Gleichungen.

Lemma 4.1 (Existenz der dritten Wurzel). Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x^3 = a$. Schreibe dann

$$\sqrt[3]{a} = x.$$

Beweis(-skizze). Für $a \geq 0$ lässt sich zeigen, dass

$$x = \sup\{y \in \mathbb{R} : y^3 \leq a\}$$

in $\mathbb{R}$ existiert und $x^3 = a$ gilt. Für $a < 0$ (also $-a \geq 0$) setze

$$\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}.$$

□

Ziel ist es nun, Gleichungen der Gestalt

$$(4.2) \quad x^3 + ax = b$$

mit $a \neq 0$ zu lösen.

Methode von Vieta und Cardano

Beobachtung 1: Falls $s, t \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$(4.3) \quad a = 3st \quad \text{und} \quad b = s^3 - t^3,$$

dann löst $x = s - t$ die Gleichung 4.2 (Beweis durch direktes Nachrechnen).

Es müssen also nur noch $s, t \in \mathbb{R}$ gefunden werden, die 4.3 erfüllen.

$$\begin{aligned} 4.3a &\Rightarrow s = \frac{a}{3t} \\ &\stackrel{4.3b}{\Rightarrow} b = \left(\frac{a}{3t}\right)^3 - t^3 \\ &\Rightarrow t^3 + b - \left(\frac{a}{3t}\right)^3 = 0 \\ &\Rightarrow (t^3)^2 + bt^3 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \end{aligned}$$

Man erhält also eine quadratische Gleichung für t^3 . Falls also $D := \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0$, dann gilt wegen 4.1

$$t^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{D} \quad \text{und wegen 4.3b} \quad s^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{D}.$$

Mit Beobachtung 1 folgt dann:

Beobachtung 2: Falls $D := \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0$, dann ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{D}}$$

eine Lösung von 4.2.

Beispiel. Betrachte

$$x^3 + 6x = 20.$$

Dann gilt $a = 6$, $b = 20$, $D = 10^2 + 8 = 108 = 3 \cdot 36 = 3 \cdot 6^2$, also $\sqrt{D} = 6 \cdot \sqrt{3}$. Mit Beobachtung 2 erhält man die Lösung

$$x_1 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 2$$

Nun, da eine Lösung für den Fall $D \geq 0$ gefunden wurde bleibt die Frage, was im Fall $D < 0$ zu tun ist.

Cardanos Idee Triff hierfür die folgenden Annahmen

- Es gibt eine “imaginäre” Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$.
- Mit Zahlen der Form $a + b \cdot i$ kann wie bisher gerechnet werden.

Beispiel. (a) $(11i)^2 = 11^2 i^2 = -121$

$$(4.4) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-121} = 11i$$

(b)

$$\begin{aligned} (2+i)^3 &= (2+i)(2+i)^2 \\ &= (2+i)(2^2 + 4 \cdot i + i^2) = (2+i)(3+4i) \\ &= 6 + 8i + 3i - 4 = 2 + 11i \end{aligned}$$

$$(4.5) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{2+11i} = 2+i, \quad \sqrt[3]{2-11i} = 2-i.$$

Beispiel (Cardano/Bombelli). Betrachte

$$x^3 - 15x = 4$$

also $a = 15$, $b = 4$, $D = 4 - 125 = -121$. Wende nun (trotz $D < 0$) Beobachtung 2 an:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} \\ &\stackrel{4.4}{=} \sqrt[3]{2+11i} - \underbrace{\sqrt[3]{-(2-11i)}}_{=\sqrt[3]{2-11i}} \\ &\stackrel{4.5}{=} 2+i + 2-i = 4 \end{aligned}$$

(Probe: $4^3 - 15 \cdot 4 = 4(4^2 - 15) = 4$)

Fazit: Obwohl noch absolut unklar ist, was “ i “ ist, hat diese Methode zu einer Lösung geführt. Das obige Beispiel ist der historische Kontext, in dem die komplexen Zahlen, also Zahlen der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eingeführt wurden. In vielen Bereichen stellt sich heraus, dass die komplexen Zahlen eine **nützliche** Erweiterung der reellen Zahlen darstellen.

Es muss allerdings noch die Frage gestellt werden, ob man mit i einfach so rechnen darf. D.h. es muss nachgeprüft werden, ob Zahlen der Form $x + iy$ einen kommutativen Körper bilden mit den nachfolgenden Rechenoperationen:

Addition

$$(4.6) \quad (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

und **Multiplikation:**

$$(4.7) \quad (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := x_1x_2 + (x_1y_2 + y_1x_2) \cdot i + y_1y_2 \cdot i^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

4.2 Der komplexe Zahlenkörper

Um die komplexen Zahlen rigoros einzuführen ist es mitunter einfacher, Zahlen der Form $x + iy$ als geordnetes Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu beschreiben.

Definition 4.2 (komplexe Zahlen). *Definiere auf*

$$\mathbb{C} := \{z : z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

eine Addition $+$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und eine Multiplikation $\cdot$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Als Menge stimmt $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ überein. Die Addition entspricht dabei der Vektoraddition auf $\mathbb{R}^2$. Hierauf aufbauend wird $\mathbb{C}$ später als *komplexe Zahlenebene* interpretiert werden.

Satz 4.3. $\mathbb{C}$ ist ein kommutativer Körper. In ihm hat die Gleichung $z^2 = -1$ zwei Lösungen.

Beweis. Überprüfe die Körperaxiome (K1)-(K5) durch Nachrechnen.

Hinweise:

- Neutralelemente sind $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 0)$.
- Das multiplikativ Inverse von $z = (x, y) \neq 0$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

- Die Lösungen zu $z^2 = -1$ sind $z_{1,2} = (0, \pm 1)$.

□

Definition 4.4 (imaginäre Einheit). (a) Nenne $i := (0, 1)$ die **imaginäre Einheit** und $1 := (1, 0)$ das **Eins-Element**.

(b) Nutze die gebräuchliche Darstellung

$$z = x + iy = (x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

und nenne x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z . Schreibe

$$x =: \operatorname{Re}(z), \quad y =: \operatorname{Im}(z).$$

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) = 0$ heißt **rein imaginär**. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) = 0$ heißt **reell**.

(c) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ setze

$$\bar{z} := x - iy$$

und nenne $\bar{z}$ die **Konjugation** (bzw. das **konjugierte Element**) zu z .

(d) Die durch

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

definierte nicht-negative, reelle Zahl heißt **Betrag** von $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Lemma 4.5 (Rechenregeln der Konjugation). Es gelten für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$(a) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$(b) \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$(c) \quad \bar{z} = z \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}(z) = 0 \quad (\text{d.h. } z \text{ ist reell})$$

$$(d) \quad z\bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = |z|^2$$

Beweis. Nachrechnen. □

Lemma 4.6 (Eigenschaften des Betrags). Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

$$(a) \quad |z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z| = 0 \Rightarrow z = 0.$$

$$(b) \quad |z \cdot w| = |z| |w|$$

$$(c) \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

$$(d) \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

$$(e) \quad |z| = |\bar{z}|$$

Beweis. (a),(b),(d) trivial.

(e):

$$|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2 = |\bar{z}|^2$$

(c):

$$\begin{aligned}
 |z + w| &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + \underbrace{z\bar{w} + w\bar{z}}_{=z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z\bar{w}|} + w\bar{w} \\
 &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2
 \end{aligned}$$

□

Satz 4.7. (a) Auf $\mathbb{C}$ wird durch $d(z, w) := |z - w|$ eine Metrik definiert, nenne diese den Abstand (in der komplexen Zahlenebene).

(b) Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist genau dann beschränkt/Cauchy-Folge/konvergent gegen z , wenn die durch $x_n := \operatorname{Re}(z_n)$ und $y_n := \operatorname{Im}(z_n)$ definierten reellen Folgen **beide** beschränkt/Cauchy-Folgen/konvergent gegen $\operatorname{Re}(z)$ bzw. $\operatorname{Im}(z)$ sind.

Beweis. (a) Nachrechnen.

(b) Hier nur für Beschränktheit:

$$\begin{aligned}
 (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt in } \mathbb{C} &\stackrel{3.17}{\Leftrightarrow} \exists r > 0 : z_n \in B(0; r) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
 &\Leftrightarrow \exists r > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{(\operatorname{Re}(z_n))^2}_{=x_n} + \underbrace{(\operatorname{Im}(z_n))^2}_{=y_n} = |z_n|^2 < r^2 \\
 &\Rightarrow |x_n| < r \text{ und } |y_n| < r \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
 &\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sind beschränkt in } \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, dann

$$\begin{aligned}
 &\exists r > 0 : |x_n| < r \wedge |y_n| < r \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
 \Rightarrow &|z_n|^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2 < 2r^2 < (2r)^2 \\
 \Rightarrow &z_n \in B(0; 2r) \\
 \Rightarrow &(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt in } \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

□

Korollar 4.8. (a) (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$): Jede in $\mathbb{C}$ beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.

(b) ($\mathbb{C}$ ist vollständig): Jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist konvergent.

Satz 4.9 (Rechenregeln für komplexe Folgen). Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei komplexe konvergente Folgen. Dann:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$.

(b) $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(c) $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

(d) Sei $\inf_{n \in \mathbb{N}} |x_n| > 0$. Dann ist $(\frac{y_n}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{x_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

4.3 $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$

Betrachte die Menge

$$U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\} = \{z = (x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$$

Feststellung 1: Es gelten $0 \in U$ und $1 \in U$, sowie $\forall z_1, z_2 \in U : z_1 + z_2, z_1 z_2 \in U$. Also ist U abgeschlossen unter Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$, und U ist selber ein Körper—ein sogenannter *Unterkörper* von $\mathbb{C}$. (Ein weiteres Beispiel für einen Unterkörper sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die einen Unterkörper von $\mathbb{R}$ bilden.) Betrachte nun die Abbildung

$$j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad j(x) := (x, 0)$$

Feststellung 2: j ist injektiv und das Bild von j ist genau U . Ausserdem gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$j(\underbrace{x + y}_{\text{Add. in } \mathbb{R}}) = \underbrace{j(x) + j(y)}_{\text{Add. in } \mathbb{C}}$$

und

$$j(\underbrace{x \cdot y}_{\text{Mult. in } \mathbb{R}}) = \underbrace{j(x) \cdot j(y)}_{\text{Mult. in } \mathbb{C}},$$

also ist j verträglich mit der Körperstruktur. Wir sagen: $\mathbb{R}$ ist *isomorph* zum Unterkörper $U \subseteq \mathbb{C}$. Wir nennen $\mathbb{C}$ eine *Körpererweiterung* von $\mathbb{R}$.

Feststellung 3: Es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{|x|}_{\text{in } \mathbb{R}} = \underbrace{|j(x)|}_{\text{in } \mathbb{C}}$$

also ist j verträglich mit dem Abstandsbegriff. Wir sagen: $\mathbb{R}$ ist *isometrisch isomorph* zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Fazit: Die reellen Zahlen sind in $\mathbb{C}$ enthalten (nicht nur als Menge, sondern auch als Körper und als metrischer Raum). Wir identifizieren daher $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$ und schreiben einfach x anstelle von $j(x)$.

Bemerkung 4.10 (Die Unmöglichkeit $\mathbb{C}$ anzuordnen). *Es gibt keine Ordnung $\prec$ auf $\mathbb{C}$, die mit der reellen Ordnung auf $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}$ übereinstimmt, d.h. sodass: $x < y$ in $\mathbb{R} \Leftrightarrow j(x) \prec j(y)$ in $\mathbb{C}$. Argument: Angenommen, eine Ordnung $\prec$ auf $\mathbb{C}$ existiert im Sinne der Ordnungsaxiome in Axiom 2.2. Dann gilt entweder $i \prec 0$ oder $0 \prec i$. In beiden Fällen folgt aus den Ordnungsaxiomen, dass $0 \prec i^2 = -1$. Letzteres passt nicht zur reellen Ordnung $-1 < 0$.*

4.4 Die komplexe Zahlenebene

Geometrische Anschauung von $+$ und $\cdot$ Anstatt $w \in \mathbb{C}$ als einen Punkt in der komplexen Ebene zu verstehen, betrachten wir die Abbildungen (von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$)

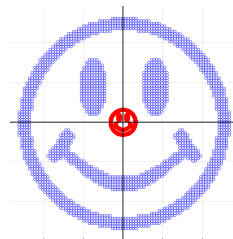
$$z \mapsto w + z \quad \text{und} \quad z \mapsto w \cdot z.$$

1. Addition: Für $w \in \mathbb{C}$ beschreibt die Abbildung $z \mapsto w + z$ eine *Verschiebung (Translation)* um w in der komplexen Zahlenebene.
2. Multiplikation: Für $w \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung $z \mapsto w \cdot z$ eine *Ähnlichkeitsabbildung mit dem Streckfaktor $|w|$* , denn es gilt

$$|w \cdot z_1 - w \cdot z_2| = |w| |z_1 - z_2|.$$

Zwei Spezialfälle:

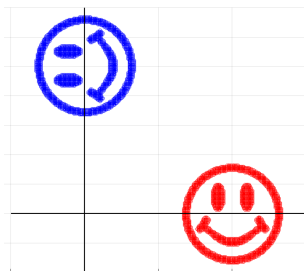
- (a) Für $w = r$ mit $r > 0$ (insbesondere reell), ist $z \mapsto rz$ eine Streckung mit Zentrum 0 und Streckfaktor r .



Bilder der roten Menge unter der Abbildung

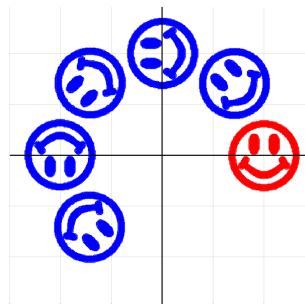
$$z \mapsto 8z.$$

- (b) Für $|w| = 1$ ist $z \mapsto w \cdot z$ eine Drehung um die 0.



Bilder der roten Menge unter der Abbildung

$$z \mapsto iz.$$

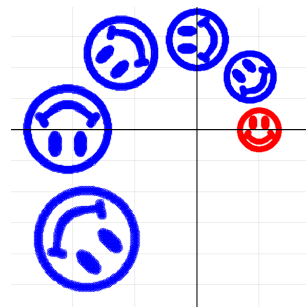


Bilder der roten Menge unter der Abbildung

$$z \mapsto w^n \cdot z$$

mit $w = \frac{1+i}{|1+i|} = 1/\sqrt{2}(1+i)$
und $n = 1, \dots, 5$.

Die Multiplikation mit einem beliebigen $w \in \mathbb{C}$ kann als Kombination von Rotation und Streckung verstanden werden.

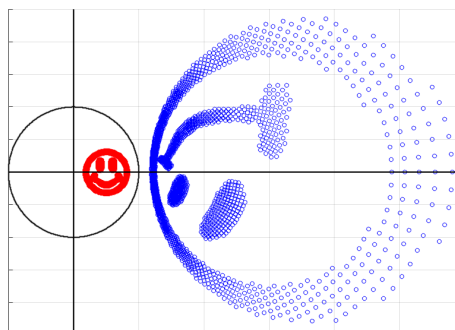


Bilder der roten Menge unter der Abbildung

$$z \mapsto w^n \cdot z$$

mit $w = 1.2/\sqrt{2}(1 + i)$ und $n = 1, \dots, 5$.

- (c) Inversion: Die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ können wir als Spiegelung an der 1-Sphäre mit anschließender Spiegelung an der reellen Achse verstehen.



Bilder der roten Menge unter der Abbildung

$$z \mapsto z^{-1}$$

Beispiel 4.11. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Betrachte die Folge $z_n := z^n$ und unterscheide die folgenden Fälle.

(1): $r := |z| = 1$. Dann gilt

$$z_n \text{ ist konvergent} \quad \Rightarrow \quad z = 1.$$

(2): $r := |z| < 1$. Dann gilt

$$z_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(3): $r := |z| > 1$. Dann ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.

Beweis. **(1):** " $\Leftarrow$ " trivial.

" $\Rightarrow$ " : Angenommen es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$ in $\mathbb{C}$. Dann folgt aus den Rechenregeln für Folgen.

$$\begin{aligned} w &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} z \cdot z_n = z \cdot w \\ \Rightarrow z \cdot w &= w \quad \Rightarrow \quad w(z - 1) = 0 \\ \Rightarrow z &= 1 \text{ oder } w = 0 \end{aligned}$$

$w = 0$ kann jedoch nicht gelten, da sonst für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|z^n - w| = |z^n| = |z|^n = 1.$$

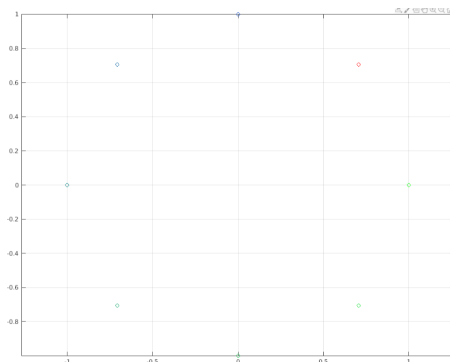
(2): Es gilt

$$|z^n| = |z|^n = r^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

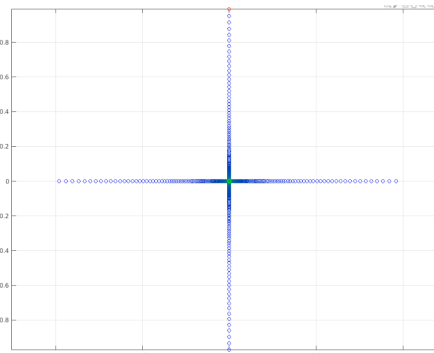
(3): Setze $c := |z - 1| > 0$ (da $|z| > 1$). Dann

$$|z_{n+1} - z_n| = |z_n(z - 1)| = \underbrace{|z_n|}_{\geq 1} \cdot c \geq c,$$

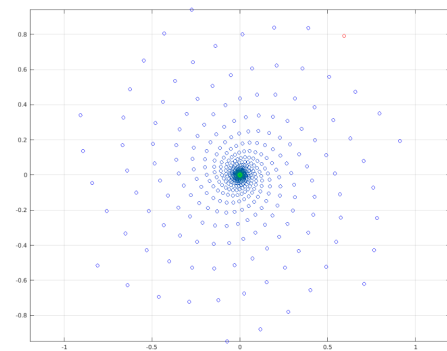
also ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-folge, also insbesondere nicht konvergent. □



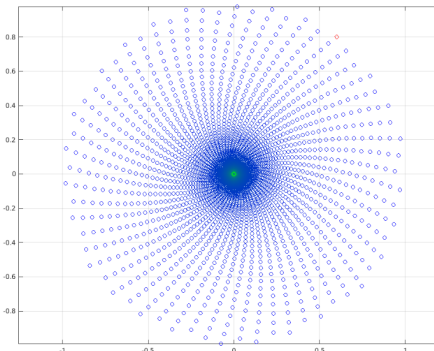
Die Folge $z_n = z^n$ mit $z = \frac{1+i}{1-i}$.



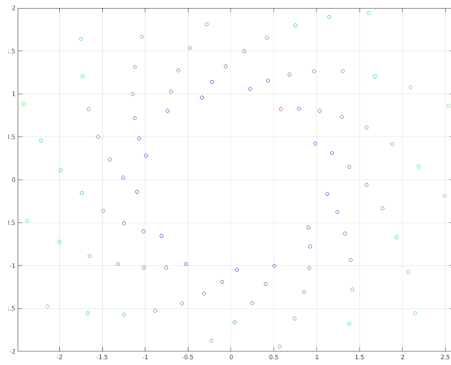
Die Folge $z_n = z^n$ mit $z = 0.99i$.



Die Folge $z_n = z^n$ mit $z = 0.99 \frac{3+i}{3-i}$.



Die Folge $z_n = z^n$ mit $z = 0.999 \frac{3+i}{3-i}$.

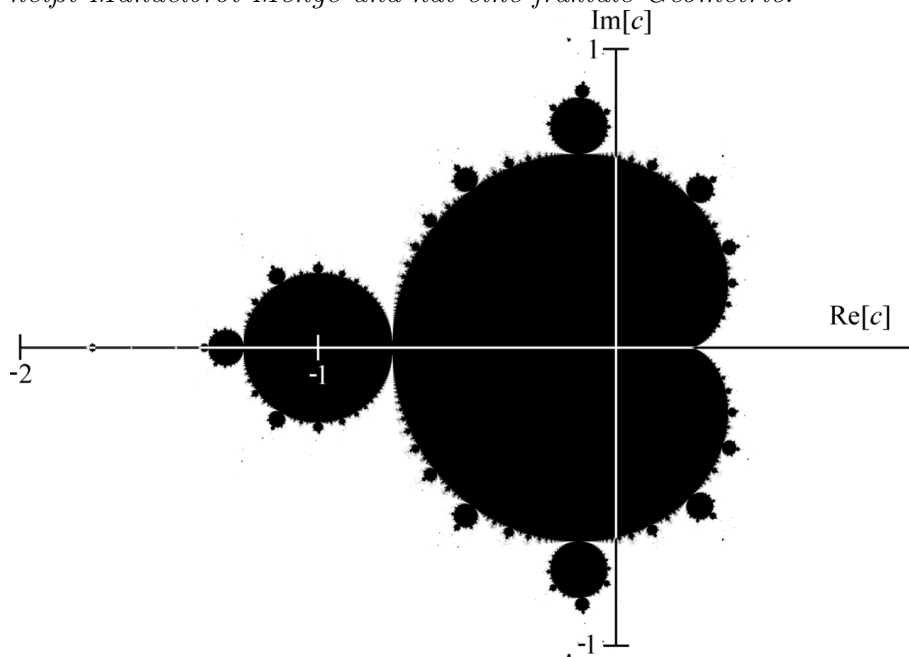


Die Folge $z_n = z^n$ mit $z = 1.01 \frac{1+i\sqrt{2}}{|1+i\sqrt{2}|}$.

Beispiel 4.12 (Mandelbrotmenge). Wir definieren eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ wie folgt:

$$c \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Die durch } z_0 = 0, z_{n+1} := z_n^2 + c \\ \text{definierte Rekursionsfolge erfüllt} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} |z_n| \leq 2. \end{array}$$

Man kann (einfach zeigen), dass $\{0, -2, i\} \subseteq \mathcal{M}$ und $2 \notin \mathcal{M}$ (Übung). Die Menge $\mathcal{M}$ heißt Mandelbrot-Menge und hat eine fraktale Geometrie.



4.5 Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Erinnerung: Für $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$\begin{aligned} z^0 &:= 1 \\ z^{n+1} &:= z \cdot z^n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ z^{-n} &:= \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \text{falls } n \in \mathbb{N}_0, z \neq 0. \end{aligned}$$

Rechenregeln: Seien $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ (oder $w, z \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$). Dann

$$\begin{aligned} z^n z^m &= z^{n+m} \\ z^n w^n &= (zw)^n \\ (z^n)^m &= (z^m)^n = z^{nm} \end{aligned}$$

Satz 4.13. Jede quadratische Gleichung $z^2 + az + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. (Blatt 10 Aufgabe 5) Als erstes zeigen wir, dass für $b \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 + b = 0$ mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ besitzt. Sei $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$). Dann gilt

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = -b \Leftrightarrow \operatorname{Re}(b) = y^2 - x^2 \wedge \operatorname{Im}(b) = -2xy.$$

Wir unterscheiden 2 Fälle.

- Für $\operatorname{Im}(b) = 0$ ist $x = 0$ oder $y = 0$. Ist $\operatorname{Re}(b) \geq 0$ setzen wir $y = \sqrt{\operatorname{Re}(b)}$ und $x = 0$. Ist $\operatorname{Re}(b) < 0$ setzen wir $y = 0$ und $x = \sqrt{-\operatorname{Re}(b)}$.
- Für $\operatorname{Im}(b) \neq 0$ sind $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Wir setzen $y = -\frac{\operatorname{Im}(b)}{2x}$. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(b) = y^2 - x^2 &= \frac{\operatorname{Im}(b)^2}{4x^2} - x^2 \Leftrightarrow x^4 + \operatorname{Re}(b)x^2 - \frac{\operatorname{Im}(b)^2}{4} = 0 \\ \stackrel{u=x^2}{\Leftrightarrow} u^2 + \operatorname{Re}(b)u - \frac{\operatorname{Im}(b)^2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow u_{1,2} &= -\frac{\operatorname{Re}(b)}{2} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(b)^2 + \operatorname{Im}(b)^2}{4}} = \frac{1}{2}(-\operatorname{Re}(b) \pm |b|) \\ \stackrel{u=x^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} u &= \frac{1}{2}(-\operatorname{Re}(b) + |b|). \end{aligned}$$

Wir setzen $x = \pm\sqrt{u}$ und $y = \mp\frac{\operatorname{Im}(b)}{2\sqrt{u}}$. Zur Probe überprüfen wir, ob tatsächlich die Bedingungen erfüllt sind. Es gilt

$$\begin{aligned} 2xy &= 2(\pm\sqrt{u}) \cdot \left(\mp\frac{\operatorname{Im}(b)}{2\sqrt{u}}\right) = -\operatorname{Im}(b) \text{ und} \\ x^2 - y^2 &= u - \frac{\operatorname{Im}(b)^2}{u} = \frac{1}{u}(u^2 - \operatorname{Im}(b)^2) = \frac{1}{4u}(\operatorname{Re}(b)^2 - 2|b|\operatorname{Re}(b) + |b|^2 - \operatorname{Im}(b)^2) \\ &= \frac{\operatorname{Re}(b)}{2u}(\operatorname{Re}(b) - |b|) = -\operatorname{Re}(b). \end{aligned}$$

Weiter betrachten wir die Gleichung $z^2 + az + b = 0$. Es gilt

$$z^2 + az + b = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0 \stackrel{w=z+\frac{a}{2}, c=-\frac{a^2}{4}+b}{\Leftrightarrow} w^2 + c = 0.$$

Nach dem ersten Teil gibt es wenigstens ein $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $w_0^2 = c$. Damit ist $z = w_0 - \frac{a}{2}$ Lösung der Ausgangsgleichung. $\square$

Lemma 4.14 (Dritte Einheitswurzeln). *Die Gleichung $z^3 = 1$ hat genau die drei Lösungen*

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

Beweis. Nachrechnen. $\square$

Später werden n -te Einheitswurzeln (Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$) betrachtet. Diese bilden ein gleichseitiges n -Eck in der komplexen Zahlenebene.

Satz 4.15 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jede Gleichung*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}_+$ und $a_k \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

5 Reihen

Aus einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ entsteht durch Summation der Folgenglieder eine neue Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} s_0 &:= x_0 = \sum_{k=0}^0 x_k \\ s_1 &:= x_0 + x_1 = \sum_{k=0}^1 x_k \\ s_2 &:= x_0 + x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^2 x_k \\ &\dots \\ s_n &:= \sum_{k=0}^n x_k \end{aligned}$$

Definition 5.1 (Reihe). *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Definiere*

$$s_n := \sum_{k=n_0}^n x_k \quad (n \geq n_0.)$$

Dann

(a) Die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ heißt (**unendliche**) **Reihe**. Anstelle von $(s_n)_{n \geq n_0}$ schreibt man

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k.$$

(b) Die Zahl a_n (bzw. s_n) heißt n -tes **Glied** (bzw. n -te **Partialsumme**) der Reihe.

(c) Die Reihe heißt konvergent, falls $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall heißt $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ **Grenzwert** (oder **Summe** oder **Wert**) der Reihe und man schreibt

$$s := \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k.$$

Achtung!: Das Symbol $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Reihe, als auch deren Grenzwert (falls dieser existiert).

Beispiele 5.2. (a) **Geometrische Reihe:** $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit $z \in \mathbb{C}$. Es gilt für die Partialsummen (falls $(z \neq 1)$):

$$\begin{aligned} (1-z)s_n &= (1-z) \sum_{k=0}^n z^k \\ &= \sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=0}^n z^{k+1} \\ &\stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} 1 - z^{n+1} \end{aligned}$$

also gilt

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Aus $|z| < 1$ folgt $|z^{n+1}| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) und damit

$$s_n \rightarrow \frac{1}{1-z}.$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|z| < 1$ und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}$

(b) Die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

(c) Die **alternierende harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent.

(d) Die **allgemeine harmonische Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ist für $\alpha > 1$ konvergent und für $\alpha \leq 1$ divergent (Potenzen mit reellen Exponenten werden später definiert.)

(e) **Potenzreihen** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$. Wichtiger Spezialfall: Die **Exponentialreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent.

Warum die Reihen aus (b) - (d) konvergieren oder divergieren, wird nachfolgend erklärt.

Einschub: (n te Wurzel und rationale Potenzen nicht-negativer Zahlen). Für $x \neq 0$ gelten die Potenzgesetze

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Wir können dies (mit Hilfe der Wurzeln) auf rationale Exponenten (und später mit der Exponentialreihe) auf reelle Exponenten) erweitern. Im folgenden sei $x \geq 0$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}_+$ besitzt die Gleichung $y^n = x$ genau eine reelle Lösung $y \geq 0$. Wir bezeichnen diese mit $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (Beweis wie Proposition 2.35)

(b) Für $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (nicht-negativ) mit $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_+$ definiere

$$x^q := x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

(Man prüft einfach nach, dass der Wert der rechten Seite nicht von der Darstellung $q = \frac{m}{n}$ abhängig ist.)

(c) Für $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < 0$ definiere im Falle $x \neq 0$

$$x^q := \left(\frac{1}{x}\right)^{-q}.$$

(d) Man prüft leicht nach, dass die folgenden Rechenregeln für $p, q \in \mathbb{Q}$ gelten

$$x^q x^p = x^{q+p}, \quad (x^q)^p = x^{qp}$$

wann immer die Ausdrücke wohldefiniert sind.

Proposition 5.3 (Rechenregeln). Seien $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $c \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=n_0}^{\infty} (c \cdot a_k)$ konvergent und für die Grenzwerte gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

Beweis. Folgt aus Satz 3.20 angewandt auf die Folgen der Partialsummen $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ und $\sigma_n = \sum_{k=n_0}^n b_k$. $\square$

5.1 Konvergenzkriterien

Satz 5.4 (Nullfolgenkriterium). Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis.

$$a_k = s_k - s_{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = 0$$

$\square$

Achtung, keine Äquivalenz! Betrachte z.B. $a_k = \frac{1}{k}$. Diese ist eine Nullfolge, jedoch ist die harmonische Reihe divergent.

Satz 5.5 (Cauchy-Kriterium). Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann sind äquivalent:

(a) Die Reihe konvergiert

(b)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \left(\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N \right)$$

Beweis. Für die Partialsummen gilt (Teleskopsummenargument)

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^n a_k,$$

also

$$(b) \Leftrightarrow (s_n)_{n \geq n_0} \text{ ist Cauchy-Folge} \stackrel{\text{Satz 3.34}}{\Leftrightarrow} (s_n)_{n \geq n_0} \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow (a)$$

□

Beispiel. Für die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ gilt

$$\left| \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} = m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Die Reihe erfüllt also nicht das Cauchy-Kriterium. $\Rightarrow$ **Die harmonische Reihe ist divergent.**

Satz 5.6 (Monotonie-Kriterium). Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$ für alle $k \geq n_0$. Dann sind äquivalent:

(a) Die Reihe ist konvergent.

(b) Die Folge der Partialsummen ist beschränkt.

Beweis. (1) $s_n := \sum_{k=n_0}^n a_k$. Wegen $a_k \geq 0$, ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton.

(2) (a) $\Rightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(3) (b) und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton $\stackrel{\text{Satz 3.23}}{\Rightarrow}$ (a).

□

Beispiel. Die verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, denn $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe Blatt 8, Aufgabe 2d) und $\frac{1}{k^2} \geq 0$.

Das Monotonie-Kriterium ist nur auf Reihen mit nicht-negativen Gliedern anwendbar. Nimmt man die Beträge der Glieder einer beliebigen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ so ist die resultierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern.

Definition 5.7 (Absolut konvergente Reihe). Eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiele 5.8. (a) Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit $|z| < 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sind absolut konvergent.

(b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent (was wir später zeigen), aber **nicht** absolut konvergent (da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert).

Satz 5.9 (Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz). Ist eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent und es gilt die Dreiecksungleichung für Reihen:

$$\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis. (i) Sei die Reihe absolut konvergent. Dann erfüllt $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ das Cauchy-Kriterium, d.h.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N \\ \Rightarrow \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \stackrel{\Delta\text{-Ug}}{\leq} \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N. \end{aligned}$$

Also erfüllt $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ das Cauchy-Kriterium, ist also konvergent.

(ii) Setze $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$, $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Es gilt dann $|s_n| = \left| \sum_{k=n_0}^n a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^n |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| = |s| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Beispiel 5.10 (Kombination von Montonie-Kriterium und vorangehendem Satz). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} i^k \frac{1}{k^2} = i - \frac{1}{4} - i\frac{1}{9} + \dots$ konvergiert, denn $|i^k \frac{1}{k^2}| = \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist (sogar absolut) konvergent.

Satz 5.11 (Konvergente Majorante/divergente Minorante). Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq 0$ heißt

- **Majorante** für $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$, falls $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq n_0$,
- **Minorante** für $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$, falls $|a_k| \geq b_k$ für alle $k \geq n_0$.

Es gilt

- (a) Besitzt die Reihe eine **konvergente Majorante**, so ist die Reihe **absolut konvergent**.
- (b) Besitzt die Reihe eine **divergente Minorante**, so ist die Reihe **nicht absolut konvergent**.

Beweis. (a) Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Majorante zu $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Aus $b_k = |b_k|$ (da $b_k \geq 0$ nach Voraussetzung) folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ und nach Satz 5.6 (Monotonie-Kriterium) $\exists C > 0 : \sum_{k=n_0}^n b_k \leq C$ für alle $n \geq n_0$. Damit folgt für alle $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^n |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^n b_k \leq C.$$

Also konvergiert $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut nach Satz 5.6.

(b) Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ eine divergente Minorante. Die Folge der Partialsummen $\sigma_n := \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergiert dann uneigentlich gegen ∞ (da $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton wachsend ist). Wegen

$$\sigma_n \leq \sum_{k=n_0}^n |a_k| =: s_n$$

folgt nun, dass $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert. □

Beispiel 5.12. (a) Betrachte die Reihe

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=n_0}^{\infty} \underbrace{\frac{k^3 + k}{k^3 - 2}}_{=: x_k} z^k \quad (\text{mit } |z| < 1)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x_k \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) &\Rightarrow \exists C > 0 : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \leq C \\ &\Rightarrow |a_k| \leq C |z_k| =: b_k \\ &\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k \text{ ist konvergente Majorante} \\ &\stackrel{5.11}{\Rightarrow} \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut} \end{aligned}$$

(b) Betrachte $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ mit $n \geq 2$. Wegen $\frac{k^2}{k^n} = k^{2-n} \leq 1$ für $n \geq 2$ (und $k \geq 1$), folgt $|\frac{1}{k^n}| = \frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{k^2}$ und aus der Konvergenz von $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ folgt nach 5.11 auch die (absolute) Konvergenz von $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^n}$.

Satz 5.13 (Quotientenkriterium). Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$, sodass

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q \quad \text{für alle } k \geq n_0.$$

Dann ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis. Es gilt (Beweis mittels Induktion)

$$|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq |a_{k-2}|q^2 \leq |a_{n_0}|q^{k-n_0}$$

für alle $k \geq n_0$. Daher ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_{n_0}|q^{k-n_0}$ eine konvergente Majorante und die Behauptung folgt mit Satz 5.11. □

Beispiel 5.14 (Exponentialreihe). Die Exponentialreihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, denn mit $a_k := \frac{z^k}{k!}$ gilt.

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|k!}{(k+1)!} = \frac{|z|}{k+1} =: q.$$

Für $k \geq |z|$ gilt $q < 1$, also konvergiert die Reihe absolut nach 5.13. Die Tatsache, dass das Quotientenkriterium hier für endlich viele $k \in \mathbb{N}$ nicht erfüllt ist, spielt dabei keine Rolle.

Bemerkung 5.15. Es genügt **nicht** dass $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ für alle $k \geq n_0$ gilt, damit die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Beispielsweise gilt für die harmonische Reihe $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber die Reihe divergiert bekannterweise (insbesondere gilt $\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{k+1} = 1$).

Satz 5.16 (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und setze

$$w := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Dann gilt

- $w < 1 \Rightarrow$ die Reihe konvergiert absolut
- $w > 1 \Rightarrow$ die Reihe divergiert.

Beweis. (mittels Vergleich mit geometrischer Reihe)

•

$$\begin{aligned} w > 1 &\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow |a_k| > 1 \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist keine Nullfolge} \\ &\stackrel{5.4}{\Rightarrow} \text{die Reihe divergiert} \end{aligned}$$

- Sei $w < 1$, dann wähle ein $q \in \mathbb{R}$ mit $w < q < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt dann $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq N$, also ist $\sum_{k=N}^{\infty} q^k$ eine konvergente Majorante für $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, also ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

□

Achtung!: Über den Fall $w = 1$ kann keine allgemeine Aussage gemacht werden.

Bemerkung. Die bisherigen Kriterien sind nicht auf die alternierende harmonische Reihe anwendbar.

Satz 5.17 (Leibniz-Kriterium). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

und für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k - \underbrace{\sum_{k=n_0}^n (-1)^k a_k}_{=s_n} \right| \leq a_{n+1} \quad (*)$$

Beweis. Es genügt den Fall $n_0 = 0$ zu betrachten. Setze also $s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Für $(o_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $o_k := s_{2k}$ und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $u_k := s_{2k+1}$ gilt dann

(a) $(o_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend (da $o_{k+1} = o_k + \underbrace{a_{2k+2} - a_{2k+1}}_{\leq 0} \leq o_k$) und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend (da $u_{k+1} = u_k - \underbrace{a_{2k+3} + a_{2k+2}}_{\leq 0} \geq u_k$).

(b) $u_k = o_k - \underbrace{a_{2k+1}}_{\geq 0} \Rightarrow 0 \leq o_k - u_k \leq a_{2k+1}$

(c) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$o_0 \geq o_k \geq u_k \geq u_0$$

also sind $(o_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt und somit (wegen Monotonie) konvergent. Setze

$$o := \lim_{k \rightarrow \infty} o_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} u_k =: u$$

Wegen (b) folgt dann

$$0 \leq o - u = \lim_{k \rightarrow \infty} (o_k - u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 0$$

also gilt

$$u = o =: s.$$

(d) (Beweis von (*)):

- Falls $n = 2k$, dann $s_n = o_k \geq s$ und

$$|s - s_n| = o_k - \underbrace{s}_{\geq u_k} \leq o_k - u_k = a_{2k+1} = a_{n+1}.$$

- Falls $n = 2k + 1$, dann $s_n = u_k \leq s$ und

$$|s - s_n| = \underbrace{s}_{\leq o_{k+1}} - u_k \leq o_{k+1} - u_k = a_{2k+2} = a_{n+1}.$$

(e) Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, folgt aus (*) die Konvergenz der Reihe gegen s .

□

Beispiel 5.18. Alternierende harmonische Reihe. (s. nächster Abschnitt)

5.2 Umordnungssatz

Die alternierende harmonische Reihe

$$(5.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent. Die aus den Gliedern mit geraden Indizes gebildete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ ist divergent (die Partialsummen konvergieren uneigentlich gegen $+\infty$). Gleiches gilt für die aus den Gliedern mit ungeraden Indizes gebildete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2k-1} = -1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \dots$. Ihre Partialsummen konvergieren uneigentlich gegen $-\infty$. Sei nun $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir können durch Umordnen der Summationsreihenfolge in (5.1) erreichen, dass die umgeordnete Reihe gegen a konvergiert. Z.B. für $a = -1$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \dots$$

(d.h. wir nehmen negative Glieder so lange, bis die Partialsumme ≤ -1 ist, und dann positive Glieder so lange, bis die Partialsumme > -1 ist, usw.)

Für *absolut konvergente Reihen* kann dieses Phänomen nicht auftreten.

Definition 5.19 (Umordnung). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, sei $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 5.20 (Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert jede Umordnung der Reihe gegen a .

Beweis. Setze $b_k := a_{\sigma(k)}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ existiert nach dem Cauchy-kriterium (Satz 5.5) ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

Da σ surjektiv ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\{0, 1, \dots, N\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n_0)\},$$

woraus folgt

$$\forall n \geq n_0 : \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

□

Satz 5.21 (Riemann'scher Umordnungssatz). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe¹⁹ in $\mathbb{R}$. Dann existiert für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen a konvergiert.

(Ohne Beweis)

¹⁹man nennt so eine Reihe auch *bedingt* konvergent

5.3 Potenzreihe

In der Analysis interessiert man sich nicht nur für den Wert einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für ein festes $z \in \mathbb{C}$, sondern auch für die Veränderung des Wertes der Reihe, wenn z variiert wird. Betrachtet man Partialsummen einer Potenzreihe so führt dies auf Ausdrücke der Gestalt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

Der Wert von $p(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert und wir können p als Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ auffassen. Funktionen dieser Gestalt heißen Polynome und bilden eine wichtige Klasse in der Analysis.

Es ist nun naheliegend auch die (unendliche) Potenzreihen

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

als eine Funktion in der Variablen $z \in \mathbb{C}$ zu betrachten. Wie werden im Laufe der Vorlesung sehen, dass die so entstehende Funktion P sich in vielerlei Hinsicht wie ein Polynom verhält. Ein entscheidender Unterschied ist jedoch, dass die Reihe nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren und damit $P(z)$ nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert werden kann.

Definition 5.22 (Konvergenzradius). *Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist definiert durch*

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$$

(mit der Konvention, dass $1/\infty = 0$ und $1/0 = \infty$).

Satz 5.23. *Sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.*

- (a) *Für $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut.*
- (b) *Für $|z| > \rho$ divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.*
- (c) *Konvergiert die Reihe für ein $z = z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie absolut für alle $z \in B(0; |z_0|) \subseteq \mathbb{C}$.*
- (d) *Es gilt*

$$(5.2) \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|},$$

falls der Grenzwert existiert oder falls dieser $+\infty$ ist.

Beweis. (a) Das Wurzelkriterium liefert für $b_k := a_k z^k$ mit $|z| < \rho$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|b_k|^{\frac{1}{k}}}_{< \rho |a_k|^{\frac{1}{k}}} < \rho \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 1$$

(b) Wurzelkriterium mit $|z| > \rho$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|b_k|^{\frac{1}{k}}}_{> \rho |a_k|^{\frac{1}{k}}} > 1$$

(c) Aus (b) folgt $|z_0| \leq \rho$. Aus (a) folgt dann die Behauptung.

(d) Folgt mit dem Quotientenkriterium.

□

Bemerkung 5.24 (Spezialfälle und Beispiele). (i) $\rho = 0$

(ii) $\rho = \infty$

(iii) Es gilt

$$B(0; \rho) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergiert}\} \subseteq \overline{B(0; \rho)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}.$$

Über das Verhalten auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$ wird **keine** Aussage gemacht!

(iv) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat Konvergenzradius $\rho = 1$. Die Reihe konvergiert für $|z| < 1$. Für $|z| \geq 1$ ist $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge; damit divergiert die Reihe.

(v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ hat Konvergenzradius $\rho = 1$. Die Reihe konvergiert für $|z| < 1$. Für $z = 1$ ist die Reihe divergent (= harmonische Reihe) für $z = -1$ ist die Reihe konvergent (= alternierende harmonische Reihe). Man kann zeigen, die Reihe konvergiert für alle $z \neq 1$ mit $|z| \leq 1$.

(vi) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ hat Konvergenzradius $\rho = 1$. Die Reihe konvergiert für alle $|z| \leq 1$.

Das Produkt zweier Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und $q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$ ergibt ein Polynom der Form

$$(5.3) \quad \begin{aligned} p(z) \cdot q(z) &= \sum_{k=0}^{nm} c_k z^k, \\ c_k &= \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j, \end{aligned}$$

was man einfach mittels vollständiger Induktion zeigen kann.

Wir möchten dies auf Potenzreihen übertragen.

Satz 5.25 (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit c_k gemäß (5.3) definiert heißt Cauchy-Produkt von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Es gilt: Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

$\vdots$																				
b_{2n}	$a_0 b_{2n}$	$a_1 b_{2n}$	$a_2 b_{2n}$	$\dots$	$a_n b_{2n}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{2n} b_{2n}$	$\dots$										
$\vdots$																				
$\vdots$																				
b_n	$a_0 b_n$	$a_1 b_n$	$a_2 b_n$	$\dots$	$a_n b_n$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{2n} b_n$	$\dots$										
$\vdots$																				
b_2	$a_0 b_2$			$\dots$	$a_n b_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{2n} b_2$	$\dots$										
b_1	$a_0 b_1$	$a_1 b_1$		$\dots$	$a_n b_1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{2n} b_1$	$\dots$										
b_0	$a_0 b_0$	$a_1 b_0$	$a_2 b_0$	$\dots$	$a_n b_0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{2n} b_0$	$\dots$										
	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$	a_{2n}	$\dots$										

Beweis. 1) Betrachte zunächst den Fall $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze hierfür

$$C_n := \sum_{k=0}^n c_k; \quad A_n := \sum_{k=0}^n a_k; \quad B_n := \sum_{k=0}^n b_k.$$

Behauptung:

(a) $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend (klar).

(b) Es gilt $C_n \leq A_n \cdot B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $A_n \cdot B_n \leq C_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) und (c) sind aus dem Diagramm ersichtlich und lassen sich mittels Induktion zeigen.

Wegen $A_n \cdot B_n \rightarrow A \cdot B$ folgt dann aus (b), dass $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also (wegen (a) (Monotonie)) absolut konvergent ist. Setze $C := \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$, dann folgt aus (b) und (c) mit dem Sandwichkriterium

$$\begin{array}{ccccc} A_n \cdot B_n & \leq & C_{2n} & \leq & A_{2n} \cdot B_{2n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \cdot B & & C & & A \cdot B \end{array}$$

Es folgt also $C = A \cdot B$.

- 2) Wir betrachten nun den allgemeinen reellen Fall $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ durch Rückführung auf (1). Zunächst gilt, da $\sum a_k$ und $\sum b_k$ absolut konvergent sind und wegen $|c_k| \leq \sum_{\ell=0}^k |a_{k-\ell}| |b_\ell|$ folgt, dass auch $\sum c_k$ absolut konvergent ist.
Setze

$$\begin{aligned} a_k^+ &:= \max\{a_k, 0\} && \text{(Positivteil)} \\ a_k^- &:= a_k^+ - a_k = \max\{-a_k, 0\} && \text{(Negativteil)} \\ b_k^+, b_k^- &\text{ analog} \end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \right),$$

ebenso für $\sum b_k$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) &= \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \right) \right) \cdot \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^+ \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^- \right) \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^+ \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^- \right) \\ &\quad - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^- \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^+ \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{++} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{--} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{+-} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{-+}, \end{aligned}$$

wobei

$$c_k^{\pm\pm} := \sum_{\ell=0}^k a_{k-\ell}^{\pm} b_{\ell}^{\pm},$$

gemäß des Cauchy-Produktes. Wegen

$$\begin{aligned} &a_{k-\ell}^+ b_{\ell}^+ + a_{k-\ell}^- b_{\ell}^- - a_{k-\ell}^- b_{\ell}^+ - a_{k-\ell}^+ b_{\ell}^- \\ &= a_{k-\ell} b_{\ell}^+ + a_{k-\ell} b_{\ell}^- \\ &= a_{k-\ell} b_{\ell} \end{aligned}$$

folgt, in Kombination mit absoluter Konvergenz,

$$\tilde{c} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

- 3) Der allgemeine Fall $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ kann auf den reellen Fall zurückgeführt werden, indem man a_k und b_k in Realteil und Imaginärteil zerlegt. Man argumentiert hierbei ähnlich wie in (2). Die Details werden dem Leser überlassen.

□

5.4 Exponentialfunktion

Definition 5.26 (Exponentialfunktion und Eulersche Zahl). *Die durch*

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definierte Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Exponentialfunktion. Die Zahl $e := \exp(1)$ heißt Eulersche Zahl.

Mit der Exponentialfunktion lassen sich viele Prozesse in den Naturwissenschaften beschreiben.

Beispiel 5.27 (Wachstumsmodelle). Wir bezeichnen mit $p(t) \in \mathbb{R}$ die Populationsgröße zum Zeitpunkt t . Empirisch kann man häufig die relative Wachstumsrate

$$(5.4) \quad \lambda = \frac{p(t+h) - p(t)}{p(t)h}$$

messen. Hierbei bezeichnet $h > 0$ einen kleinen Zeitschritt. Man stellt häufig fest, dass λ nicht von der Größe $p(t)$ der Population abhängig ist. Diese Beobachtung motiviert ein diskretes Modell: Wir betrachten Zeitschritte $t_k = kh$ und bezeichnen mit p_k die Population zum Zeitpunkt t_k . Wir nehmen an, dass (5.4) gilt, also

$$p_k = (1 + \lambda h)p_{k-1} = \dots = (1 + \lambda h)^k p_0.$$

Wir interessieren uns für die Größe der Population zum Zeitpunkt $t = 1$ und nehmen an, dass dieser nach $n = \frac{1}{h} \in \mathbb{N}$ Zeitschritten erreicht wird. Demnach gilt $p_n = (1 + \frac{\lambda}{n})^n p_0$. Das Verhältnis von Anfangs- und Endpopulation ist durch

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

gegeben und hängt sowohl von λ , als auch von der Zeitschrittweite h (resp. n) ab. Für $\lambda > 0$ wächst die Population, für $\lambda < 0$ schrumpft die Population.

Ist die Zeitschrittweite h sehr viel kleiner als 1, also $n \gg 1$, so ist es natürlich den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zu betrachten:

Lemma 5.28. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$(5.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z).$$

Beweis siehe Übung.

Wir stelle fest, dass im Limes ($n \rightarrow \infty$) das Verhältnis aus Anfangs- und Endpopulation nur noch von λ abhängig ist und durch $\exp(\lambda)$ gegeben ist.

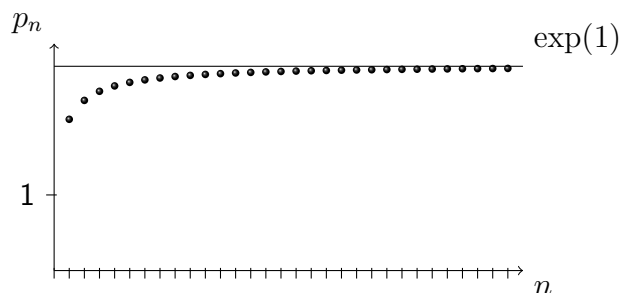


Abbildung: Folge $p_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

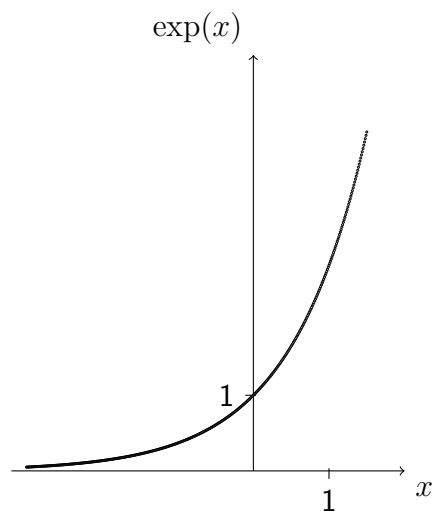


Abbildung: Funktionsgraph $x \mapsto \exp(x)$.

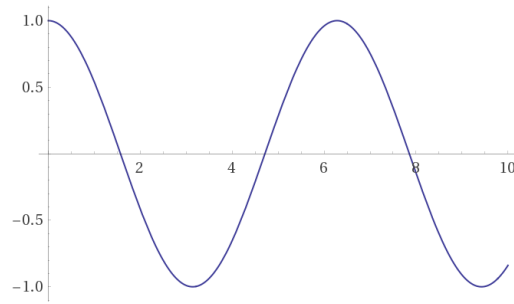


Abbildung 5: $t \mapsto \operatorname{Re}(\exp(\omega t))$ mit $\omega = i, u_0 = 1$

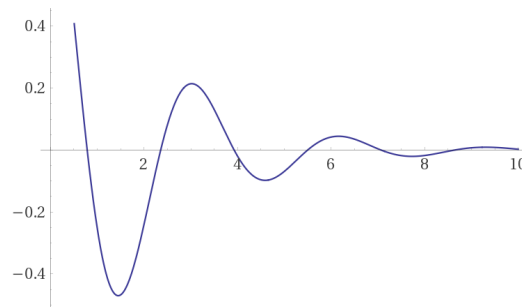


Abbildung 6: $t \mapsto \operatorname{Re}(\exp(\omega t))$ mit $\omega = -\frac{1}{2} + i \cdot 2, u_0 = 1$

Beispiel 5.29. Mit der Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(t) = \operatorname{Re}(\exp(t\omega)u_0)$$

mit $\omega, u_0 \in \mathbb{C}$ werden Schwingungsprozesse (z.B. harmonische Oszillator) beschrieben.

Proposition 5.30. (a) $\exp(0) = 1$

(b) (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$

(c) $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$

(d) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

(e) $|\exp(z) - 1| \leq \frac{|z|}{1-|z|}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

(f) Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergente Folge, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) = \exp(z)$

(g) Für $q \in \mathbb{Q}$ gilt $e^q = \exp(q)$.

Beweis. (a) klar.

(b) Verwende das Cauchy-Produkt (Satz 5.25) für:

$$a_k := \frac{z_1^k}{k!}, \quad b_k := \frac{z_2^k}{k!}.$$

Es gilt also

$$c_k := \sum_{\ell=0}^k a_{k-\ell} b_\ell = \sum_{\ell=0}^k z_1^{k-\ell} z_2^\ell \frac{1}{(k-\ell)!} \frac{1}{\ell!}.$$

Andererseits folgt aus der Binomischen Formel (Satz 2.20):

$$\frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^k z_1^{k-\ell} z_2^\ell \underbrace{\binom{k}{\ell}}_{= \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}} \frac{1}{k!} = \sum_{\ell=0}^k z_1^{k-\ell} z_2^\ell \frac{1}{(k-\ell)!} \frac{1}{\ell!}$$

also gilt die Behauptung.

(c)

$$\exp(-z) \exp(z) \stackrel{(b)}{=} \exp(z - z) = \exp(0) \stackrel{(a)}{=} 1$$

(d)

$$\overline{\exp(z)} \stackrel{4.9}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \exp(\bar{z})$$

(e) Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} |\exp(z) - 1| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{|z|^k}_{\text{konv. da } |z| < 1} \\ &= |z| \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k}_{\text{geom. Reihe}} \\ &= \frac{|z|}{1 - |z|} \end{aligned}$$

(f) Setze $w_n := z_n - z$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ in $\mathbb{C}$, also

$$\begin{aligned} |\exp(\underbrace{z_n}_{=z+w_n}) - \exp(z)| &\stackrel{(b)}{=} |\exp(z)(\exp(w_n) - 1)| \\ &= |\exp(z)| \underbrace{|\exp(w_n) - 1|}_{\leq \frac{|w_n|}{1-|w_n|} \rightarrow 0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(g) • $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}) \stackrel{(b)}{=} (\exp(1))^n = e^n$$

- $-n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(n) = \frac{1}{\underbrace{\exp(-n)}_{>0}} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n$$

- $q = \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$(e^q)^m = e^{q \cdot m} = e^n = \exp(n) = \exp(q \cdot m) = \exp(\underbrace{q + \dots + q}_{m\text{-mal}}) = \exp(q)^m$$

Da $e^q, \exp(q) \in \mathbb{R}_+$ folgt $e^q = \exp(q)$.

□

Die reelle Exponentialfunktion Aus (d) folgt unmittelbar $\exp(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir nennen die durch $x \mapsto \exp(x)$ definierte Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die (reelle) Exponentialfunktion und bezeichnen diese ebenfalls mit $\exp$.

Definition 5.31 (Monotone Funktion). Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine reelle Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$,
- **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$,
- **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D : (x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$,
- **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D : (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.

Satz 5.32. (a) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt nur Werte in $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ an und es gilt:

$$(5.6) \quad \forall x \geq 0 : 1 \leq \exp(x)$$

$$(5.7) \quad \forall x \leq 0 : 0 < \exp(x) \leq 1$$

(b) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis. (a) Es gelten

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(x) = \underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{=1} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{>0} > 1,$$

sowie

$$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(x) = \frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{\geq 1}} \leq 1$$

und

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \underbrace{\exp(x)}_{\geq 1} \exp(-x) \quad \Rightarrow \quad \exp(-x) > 0.$$

(b) $\exp$ ist streng monoton wachsend, denn

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \underbrace{\exp(y - x)}_{\substack{>0 \\ >1}} > \exp(x)$$

Aus strenger Monotonie folgt unmittelbar die Injektivität. Es bleibt zu zeigen, dass $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ surjektiv ist. Sei $y > 0$ und setze $A := \{x \in \mathbb{R} : \exp(x) \leq y\}$. Wir zeigen zunächst, dass A ein Supremum $x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt und dann, dass $\exp(x_0) = y$ gilt.

1. Behauptung: $A \neq \emptyset$. Argument: Es gilt die Abschätzung

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \leq \max\{0, \exp(x)\},$$

denn für $x > 0$ gilt

$$x \leq 1 + x + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{>0} > x.$$

Daraus folgt dann

$$\exp\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\underbrace{\exp\left(\frac{1}{y}\right)}_{\geq \frac{1}{y}}} \leq y$$

also $-\frac{1}{y} \in A$

2. A ist nach oben beschränkt, denn aus $x \in A$ und $(\star)$ folgt:

$$x \leq \max\{0, \exp(x)\} \leq \max\{0, y\}.$$

3. Nach dem Supremumsaxiom gilt $x_0 := \sup A \in \mathbb{R}$

4. Es gilt $\exp(x_0) \leq y$, denn nach der Definition des Supremums existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \rightarrow x_0$. Aus $x_n \in A$ folgt $\exp(x_n) \leq y$. Andererseits gilt $\exp(x_n) \rightarrow \exp(x_0)$ wegen Proposition 5.30 (f). Also folgt $\exp(x_0) \leq y$.

5. Es gilt $\exp(x_0) \geq y$. Betrachte hierzu $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$. Dann gilt $x_n \notin A$ und damit $\exp(x_n) > y$. Andererseits gilt $x_n \rightarrow x_0$ und damit $\exp(x_n) \rightarrow \exp(x_0)$, also $\exp(x_0) \geq y$.

Insgesamt folgt $\exp(x_0) = y$ und damit die Surjektivität. □

Definition 5.33 (Umkehrfunktion). Sei $f : M \rightarrow N$ eine Bijektion. Dann existiert für jedes $y \in N$ genau ein $x := f^{-1}(y) \in M$ mit $f(x) = y$. Die durch $N \rightarrow M, \quad y \mapsto f^{-1}(y)$ definierte Funktion heißt Umkehrfunktion von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Definition 5.34 (Logarithmus). Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ bezeichnen wir mit $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und nennen $\ln(y)$ den natürlichen Logarithmus von y .

Nach Definition ist also $\ln(y)$ eindeutig durch die Beziehung $y = \exp(\ln(y))$ bestimmt. Aus den Eigenschaften von $\exp$ folgt nun:

Satz 5.35. Seien $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$, $q \in \mathbb{Q}$.

(a) Die Funktion $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv und streng monoton wachsend.

(b) $\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2)$

(c) $\ln(y^q) = q \cdot \ln(y)$

(d) $\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \ln(y_1) - \ln(y_2)$

(e) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

(f) $\forall y > 1 : \ln(y) > 0$, $\forall y \in (0, 1) : \ln(y) < 0$

Beweis. Folgt aus den Eigenschaften von $\exp$ und wird dem Leser überlassen. □

Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$a^q = \exp(\ln(a))^q = \exp(q \ln(a)).$$

Die rechte Seite ist auch für $q \in \mathbb{C}$ erklärt. Dies motiviert nachfolgende Definition:

Definition 5.36 (Komplexe Potenzen). Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$. Die komplexe Zahl $a^z := \exp(z \cdot \ln(a))$ heißt Potenz mit Basis a und Exponenten z .

Aus den Eigenschaften der (reellen) Exponentialfunktion ergeben sich unmittelbar folgende Rechenregeln

Satz 5.37 (Potenzgesetze für komplexe Potenzen). Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(a) $1^z = 1$ und $a^0 = 1$.

(b) $a^z \cdot b^z = (ab)^z$.

(c) $a^z \cdot a^w = a^{z+w}$.

(d) $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.

(e) $(a^x)^z = a^{x \cdot z}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus den Rechenregeln der reellen Exponentialfunktion und der Definition der komplexen Potenz. Die Details werden der/dem Leserin/Leser überlassen. □

6 Stetigkeit

Betrachte im folgenden Funktionen $f : M_1 \longrightarrow M_2$, wobei (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume sind. Ist nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M_1 , dann ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n := f(x_n)$ eine Folge in M_2 . Es stellt sich nun die Frage, wann die folgende Aussage gilt:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } M_1 \quad \Rightarrow \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } M_2$$

Typischerweise betrachten wir Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $D \subseteq \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ entweder für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht.

Bemerkung. Ist (M, d) ein metrischer Raum und $D \subseteq M$, dann ist $(D, d|_D)$ mit $d|_D : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $d|_D(x, y) := d(x, y)$ ein metrischer Raum. Man nennt $d|_D$ dann die **induzierte Metrik** und schreibt meistens einfach nur d statt $d|_D$. Insbesondere ist jede Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ mit der Metrik $d(z, w) := |z - w|$ ein metrischer Raum.

6.1 Offene und abgeschlossene Mengen

Wiederholung: In einem metrischen Raum (M, d) bezeichnet

$B(x; r) = \{y \in M \mid d(y, x) < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r
und

$K(x; r) = \{y \in M \mid d(y, x) \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel um x mit Radius r

Beispiel. 1) $M = \mathbb{R}$: Dann entsprechen Kugeln genau Intervallen, also

$$\begin{aligned} B(x; r) &= (x - r; x + r) \\ K(x; r) &= [x - r; x + r] \end{aligned}$$

2) $M = \mathbb{C}$: Dann entsprechen Kugeln genau Kreisscheiben.

Definition 6.1 (offene/abgeschlossene Menge, innerer Punkt). Sei (M, d) ein metrischer Raum, $D \subseteq M$.

(a) $x \in D$ heißt **innerer Punkt von D** , falls

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq D$$

(b) D heißt **offen** (in (M, d)), falls

$$\forall x \in D \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq D$$

(c) D heißt **abgeschlossen** (in (M, d)), falls $D^c = M \setminus D$ offen ist.

Beispiele 6.2. 1) (Offene Kugeln sind offen). Sei $x_0 \in M$, $r_0 > 0$, dann ist $D := B(x_0; r_0)$ offen.

Begründung: Sei $y \in D$, dann gilt $B(y; \varepsilon) \subseteq D$ mit $\varepsilon = r_0 - d(y, x_0) > 0$, denn

$$x \in B(y; \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d(x, x_0) \leq \underbrace{d(x, y)}_{< \varepsilon} + d(y, x_0) < r_0 \quad \Rightarrow \quad x \in B(x_0; r_0) = D$$

- 2) (Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen). Sei $D = K(x_0; r_0)$ mit $x_0 \in M$, $r_0 > 0$. Sei $x \in M \setminus D$, dann $d(x, x_0) > r_0$. Setze $\varepsilon = d(x, x_0) - r_0 > 0$, so folgt

$$B(x; \varepsilon) \subseteq M \setminus D \quad \Rightarrow \quad M \setminus D \text{ ist offen}$$

- 3) M und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

- 4) Sei $M = \mathbb{R}$. Dann sind $\mathbb{R}$, (a, b) , $(-\infty, a)$ und (a, ∞) offen und $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossen. $[a, b)$ und $(a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.

Satz 6.3 (Folgencharakterisierung von abgeschlossenen Mengen). Sei (M, d) ein metrischer Raum, $D \subseteq M$. Dann sind äquivalent:

- (a) D ist abgeschlossen

- (b) Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert $a \in M$ gilt $a \in D$.

Beweis. • (a) $\Rightarrow$ (b) : Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in M$ und $a_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen es gälte $a \in \underbrace{M \setminus D}_{\text{offene Menge}}$, dann $\exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subseteq M \setminus D$. Aus $a_n \in D$ folgt dann $a_n \notin B(a, \varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was einen Widerspruch zur Annahme $a_n \rightarrow a$ darstellt.

- (b) $\Rightarrow$ (a) : Übung.

□

Satz 6.4 (Abschluss, Inneres, Rand). Sei (M, d) ein metrischer Raum, $D \subseteq M$.

- (a) $\overline{D} := \{a \in M : \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } D \text{ mit } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)\}$ heißt **Abschluss** von D , $a \in \overline{D}$ heißt **Häufungspunkt** von D .

- (b) $\overset{\circ}{D} := \text{Int}(D) := \{a \in D : a \text{ ist innerer Punkt von } D\}$ heißt **Inneres** von D .

- (c) $\partial D := \overline{D} \setminus \text{Int}(D)$ heißt **Rand** von D .

Beispiele 6.5. (a) $\overline{D}$ ist nach Satz 6.3 abgeschlossen, es gilt

$$D \text{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad \overline{D} = D$$

- (b) $\text{Int}(D)$ ist (nach Definition) offen, es gilt

$$D \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad \text{Int}(D) = D$$

- (c) $M = \mathbb{R}$:

- $D = (a, b)$, dann gilt $\overline{D} = [a, b]$, $\text{Int}(D) = (a, b)$, $\partial D = \{a, b\}$
- $D = \mathbb{Q}$, dann $\overline{D} = \mathbb{R}$, $\text{Int}(D) = \emptyset$, $\partial D = \mathbb{R}$

6.2 Stetige Funktionen

Definition 6.6 (stetige Funktion). Seien (M_1, d_1) , (M_2, d_2) zwei metrische Räume und $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine Funktion.

(a) f heißt **stetig in** $a \in M_1$, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M_1 gilt

$$x_n \rightarrow a \text{ in } M_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow f(a) \text{ in } M_2$$

(b) f heißt **stetig**, falls f in allen $a \in M_1$ stetig ist.

Beispiel 6.7. (a) (Monome:) Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist stetig (Rechenregeln für Folgen).

(b) (Sprungfunktion:) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ist stetig für alle $x \neq 0$ und nicht stetig für $x = 0$.

(c) (Exponentialfunktion:) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig (Prop. 5.30, f).

Satz 6.8 (Verkettung). Seien (M_1, d_1) , (M_2, d_2) , (M_3, d_3) metrische Räume. Dann

(a) Konstante Funktionen sind stetig.

(b) Seien $f : M_1 \rightarrow M_2$, $g : M_2 \rightarrow M_3$ Funktionen. Falls f stetig in $a \in M_1$ und g stetig in $f(a) \in M_2$ ist, dann ist die Verkettung

$$g \circ f : M_1 \rightarrow M_3, \quad x \mapsto g(f(x))$$

stetig in a .

Beweis. (a) Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow x$ in M_1 , dann gilt offensichtlich $f(x_n) = f(x) \rightarrow f(x)$ in M_2 .

(b) Sei $x_n \rightarrow a$ in M_1 ; $y_n := f(x_n)$ und $y := f(a)$. Da f stetig in a ist, gilt $y_n \rightarrow y$. Da g stetig in $f(a)$ ist, folgt die Behauptung. □

Wenn der Bildbereich zweier Funktionen f, g mehr Struktur besitzt (als nur die metrische) kann über Summe, das Produkt und der Quotient von f und g gesprochen werden. Dies ist insbesondere für $\mathbb{K}$ -wertige Funktionen der Fall: Für $f, g : M \rightarrow \mathbb{K}$ führen wir ein:

1. (Summe) $(f + g) : M \rightarrow \mathbb{K}, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x).$
2. (Produkt) $(f \cdot g) : M \rightarrow \mathbb{K}, \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$
3. (Quotient) $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \in M$ mit $g(x) \neq 0$.

Satz 6.9. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $f, g : M \rightarrow \mathbb{K}$ beide stetig in $a \in M$. Dann

(a) $(f + g)$ und (fg) sind stetig in a .

(b) gilt $g(a) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a .

Beweis. Folgt aus den Rechenregeln für Folgen. □

Korollar 6.10. • Reelle oder komplexe Polynome sind überall stetig.

- Rationale Funktionen und allgemeine Funktionen der Form $x \mapsto \frac{p}{q}$ mit Polynomen $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind auf $\{q \neq 0\}$ stetig.

Satz 6.11 ($\varepsilon - \delta$ -Kriterium). Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume, $f : M_1 \rightarrow M_2$ und $a \in M_1$. Dann gilt: f ist stetig in a genau dann, wenn

$$(6.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M_1 : (d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon)$$

Bemerkung. • (6.1) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B(a; \delta)) \subseteq B(f(a); \varepsilon)$

- Spezialfall $f : D \rightarrow \mathbb{K}, D \subseteq \mathbb{K}$, dann

$$(6.1) \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Beweis. • $\Leftarrow$: Sei (a_n) eine Folge in M_1 mit $(*) : a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Zu zeigen ist nun $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen 6.1 gilt dann $\exists \delta > 0 : f(B(a; \delta)) \subseteq B(f(a); \varepsilon)$. Wegen $(*)$ folgt dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in B(a; \delta) \Rightarrow f(a_n) \in B(f(a); \varepsilon) \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

- $\Rightarrow$ (indirekt): Es gilt

$$\begin{aligned} \neg 6.1 &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : f(B(a; \delta)) \not\subseteq B(f(a); \varepsilon) \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in B(a; \frac{1}{n}) : f(a_n) \notin B(f(a); \varepsilon) \end{aligned}$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(a)$, also ist f nicht stetig bei a . □

Bemerkung 6.12. (a)

(b) Beim $\varepsilon - \delta$ -Kriterium darf δ sowohl von ε , als auch vom Punkt a abhängen (Betrachte z.B. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$).

Definition 6.13 (gleichmäßig stetig, Lipschitz-stetig). Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume, $f : M_1 \rightarrow M_2$.

(a) f heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$(6.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M_1 : (d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

(b) f heißt **Lipschitz-stetig**, falls

$$(6.3) \quad \exists L > 0 \forall x, y \in M_1 : d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y).$$

Satz 6.14. *Es gilt*

(a) f ist Lipschitz-stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig

(b) f ist gleichmäßig stetig $\Rightarrow f$ ist stetig

Beweis. (b) trivial.

(a) Sei $\varepsilon > 0$, dann setze $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann gilt für $x, y \in M_1$ mit $d_1(x, y) < \delta$:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \underbrace{d_1(x, y)}_{< \delta = \frac{\varepsilon}{L}} < \varepsilon$$

□

Beispiele 6.15. (a) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. (Übung)

(b) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. (Übung)

(c) Die Betragsfunktion auf $\mathbb{C}$ (oder auf $\mathbb{R}$) ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$, denn $\forall x, y \in \mathbb{C} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Definition 6.16 (Kompakte Mengen in $\mathbb{K}$). Die Menge $D \subseteq \mathbb{K}$ heißt **kompakt**, falls D beschränkt und abgeschlossen ist.

Bemerkung. Im zweiten Semester wird Kompaktheit in allgemeinen metrischen Räumen betrachtet, dort unterscheidet sich die Definition von der hier gegebenen.

Lemma 6.17. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D . Dann ist die Menge $\mathcal{H}$ der Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtleer und in D enthalten.

Beweis. Es gelten:

- D beschränkt $\xrightarrow{\text{Bolz.-Weierstr.}} \mathcal{H} \neq \emptyset$.
- D abgeschlossen $\Rightarrow \mathcal{H} \subseteq D$.

□

Satz 6.18. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen f sei nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, x_{\tilde{n}} \in D :$

$$(*) : |x_n - x_{\tilde{n}}| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad (**): |f(x_n) - f(x_{\tilde{n}})| \geq \varepsilon.$$

Gemäß Lemma 6.17 existiert dann ein $x \in D$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Aus (*) folgt dann

$$\begin{aligned} |x_{\tilde{n}_k} - x| &\leq |x_{n_k} - x| + \frac{1}{n_k} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{\tilde{n}_k} &= x \\ \stackrel{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} |f(x_{n_k}) - f(x_{\tilde{n}_k})| &\leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(x_{\tilde{n}_k})| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zu (**) darstellt.

□

6.3 Hauptsätze über reellwertige, stetige Funktionen

Sei D eine Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.

Notation:

$$\inf_D f := \inf_{x \in D} f(x) = \inf f(D),$$

$$\sup_D f := \sup_{x \in D} f(x) = \sup f(D).$$

(Für die Bedeutung der Ausdrücke auf der rechten Seiten siehe Definition 2.30 und Definition 2.33.)

Definition 6.19 (Extrema). *Sei D eine Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Wir sagen, dass “ f ein Maximum (bzw. Minimum) besitzt” falls*

$$\exists p \in D \text{ (bzw. } \exists q \in D) : f(p) = \sup_D f \text{ (bzw. } f(q) = \inf_D f)$$

*Schreibe dann $\max_D f$ (bzw. $\min_D f$). Die Elemente von $f^{-1}(\{\max_D f\})$ (bzw. $f^{-1}(\{\min_D f\})$) heißen **Maximalstellen** (bzw. **Minimalstellen**) von f .*

Beispiel 6.20. (a) *Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$ besitzt kein Maximum und kein Minimum (es gilt $\inf_D f = 0$ und $\sup_D f = \infty$)*

(b) *Betrachte die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$. Dann*

$$\max_{[a,b]} f = f(b) \quad \text{und} \quad \min_{[a,b]} f = f(a).$$

Satz 6.21 (Weierstrass, Existenz von Extrema). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und kompakt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f ein Maximum und ein Minimum, insbesondere ist f beschränkt (Eine reellwertige Funktion heißt beschränkt, falls $\text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist).*

Beweis. 1) Wegen $D \neq \emptyset$ gilt $\sup_D(f) > -\infty$ und es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup_D(f)$ (möglicherweise als uneigentlicher Grenzwert $+\infty$). Da D zusätzlich kompakt ist, gibt es nach Lemma 6.17 ein $x^+ \in D$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x^+$. Da f stetig ist, gilt dann $f(x^+) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \sup_D(f)$. Also ist x^+ eine Maximalstelle und f besitzt ein Maximum.

2) Analog zeigt man $\exists x^- \in D$ mit $f(x^-) = \min_D(f) = \inf_D(f)$.

3) Aus $f(x^-) = \inf_D(f) \leq f(x) \leq \sup_D(f) \leq f(x^+)$ für alle $x \in D$ folgt die Beschränktheit von f . □

Satz 6.22 (Zwischenwertsatz). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann*

$$\exists x \in (a, b) : f(x) = 0.$$

Beweis. o.B.d.A gelte $f(a) < 0$ (sonst betrachte $-f$). Setze $G = \{t \in [a, b] : f(t) < 0\}$. Wegen $a \in G$ gilt $G \neq \emptyset$. Setze also $x := \sup(G)$ und wähle eine Folge (x_n) in G mit $x_n \rightarrow x$.

Es gilt dann $f(x_n) < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(x_n) \rightarrow f(x)$ (wegen Stetigkeit), also gilt $f(x) \leq 0$. Falls $f(x) < 0$, dann gilt offensichtlich $x < b$, also gibt es (da f stetig ist) ein $\delta > 0$ mit $f(y) < 0$ für alle $y \in [x, x + \delta)$. Es gilt also $[x, x + \delta) \subseteq G$, was einen Widerspruch zu $x = \sup(G)$ darstellt. Also muss $f(x) = 0$ gelten. $\square$

Korollar 6.23 (Zwischenwertsatz II). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$. Dann*

$$\exists x \in [a, b] : f(x) = y.$$

Beweis. Im Fall $f(a) = f(b)$ ist nichts zu zeigen. Andernfalls wende Satz 6.22 auf die Funktion

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - y$$

an. $\square$

Satz 6.24 (Stetigkeit der Umkehrfunktion). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann gilt*

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

und

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.²⁰

Beweis. 1) $a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$

2) $y \in [f(a), f(b)] \xrightarrow{\text{Kor. 6.23}} \exists x \in [a, b] : f(x) = y \Rightarrow [f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$

3) f ist injektiv, da streng monoton. Da $\text{Bild}(f) = [f(a), f(b)]$ (siehe oben), ist $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion.

4) (Stetigkeit der Umkehrfunktion): Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $[f(a), f(b)]$ mit Grenzwert y . Durch $x_n := f^{-1}(y_n)$ wird dann eine Folge in $[a, b]$ definiert. Sei $x \in [a, b]$ ein Häufungspunkt der Folge (x_n) (da $[a, b]$ kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) mind. einen Häufungspunkt und alle Häufungspunkte liegen in $[a, b]$). Dann existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \rightarrow x$. Da f stetig ist, folgt

$$\underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k} \rightarrow y} \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y).$$

Da dieses Argument auf jeden Häufungspunkt angewendet werden kann folgt, dass (x_n) genau einen Häufungspunkt besitzt und dieser durch $f^{-1}(y)$ gegeben ist. Aus der Beschränktheit der Folge (x_n) folgt dann

$$x_n = f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y).$$

$\square$

²⁰Der Satz gilt auch in folgender Situation: $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend, $a, b \in D$ mit $[a, b] \subset D$.

Korollar 6.25. (a) $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$, dann ist $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^a$ stetig.

6.4 (Uneigentliche) Grenzwerte von Funktionen

Motivation: Die Funktion $f(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{|x|})}{x}$ ist (zunächst) nur auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert (da $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist). Betrachte nun das Verhalten von f bei $0 \in \overline{D} \setminus D$ und untersuche insbesondere die Frage, ob es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g = f$ auf D .

Definition 6.26 (Grenzwert einer Funktion). Seien (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrische Räume, $D \subseteq M_1$ und $f : D \rightarrow M_2$. Sei $a \in \overline{D}$. Nenne $b \in M_2$ den **Grenzwert von f in a** , falls

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

für jede Folge $(x_n) \in D$ mit $x_n \rightarrow a$ gilt. Schreibe in diesem Fall

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in D} f(x) = b \quad \text{oder auch} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow a).$$

Bemerkung 6.27. (a) Der Grenzwert einer Funktion in einem Punkt ist eindeutig (folgt aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts einer Folge).

(b) Im Fall $a \in D$ (z.B. $a \notin \partial D$) ist in $(*)$ die konstante Folge $x_n = a$ zulässig. Daher gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ stetig in } a \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ stetig in } a \text{ und } b = f(a).$$

(c) Ist f stetig so muss nicht immer ein Grenzwert in $a \in \partial D$ existieren. Beispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber besitzt keinen Grenzwert in $a = 0$.

(d) Sei $A \subseteq D$. Bezeichne mit $f|_A$ die Restriktion/Einschränkung von f auf A , d.h.

$$f|_A : A \rightarrow M_2, \quad f|_A(a) := f(a).$$

Für $a \in \overline{A}$ setze dann

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} f|_A(x)$$

(e) In der Literatur wird auch die punktierte Version von $(*)$ verwendet, in der nur Folgen (x_n) in $D \setminus \{a\}$ betrachtet werden.

Beispiele 6.28. (a) (konstante Funktion): Ist $f : D \rightarrow M_2$ konstant gleich b (also $f \equiv b$), dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ für alle $a \in \overline{D}$.

(b) (Identitätsfunktion:) Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$, $f(x) = x$. Dann

$$\forall a \in \overline{D} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a.$$

(c) (Sprungfunktion:)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Es gilt dann $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ für alle $a \neq 0$, jedoch besitzt die Funktion keinen Grenzwert bei $a = 0$. (Betrachte z.B. $x_n = \frac{1}{n}$ und $\tilde{x}_n = \frac{-1}{n}$). Allerdings existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}_+} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}_-} f(x) = 0.$$

Bemerkung: Nach unserer Definition (im Gegensatz zur punktierten Version) existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0, x \in (-\infty, 0]} f(x)$ nicht!

(d) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

hat in keinem Punkt einen Grenzwert. (Übung)

Definition 6.29 ((Uneigentlicher) Grenzwert reellwertiger Funktionen). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

und nennen b den **(uneigentlichen) Grenzwert von f in a** , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

für alle Folgen (x_n) in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt.

Beispiel 6.30. • Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ definiert ist, muss insbesondere mindestens eine Folge (x_n) in D existieren mit $x_n \rightarrow a$.

- Spezialfall D beschränkt: In diesem Fall muss $a \in \bar{D}$ gelten und " $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ " ist eine "echter" Grenzwert. Gilt weiter $b \in \mathbb{R}$, dann steht auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ für einen echten Grenzwert und die Definition stimmt mit Definition 6.26 überein.
- In obiger Definition können aber sowohl " $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ " als auch " $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ " für uneigentliche Grenzwerte stehen: Betrachte die Funktion

$$f : (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Dann existiert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht, allerdings existieren die (uneigentlichen) Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in (0, 1)} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0, x \in (-1, 0)} f(x) = -\infty.$$

Betrachten wir $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$, so kann auch über das Verhalten von f bei $+\infty$ und $-\infty$ gesprochen werden: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Lemma 6.31. Ist $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom der Form

$$p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Übung. □

7 Differenzierbarkeit

Definition 7.1 (differenzierbare Funktion, Ableitung). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(D)$. f heißt **differenzierbar** in x_0 , falls der Grenzwert

$$(7.1) \quad f'(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ **Ableitung von f in x_0** .

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion heißt **differenzierbar** in D , falls f in allen $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Ist darüber hinaus $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ stetig, so heißt f **stetig differenzierbar** in D .

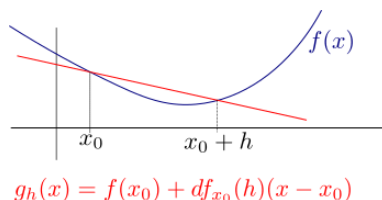
Bemerkung 7.2 (Differenzenquotienten). Der Quotient

$$df_{x_0}(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heißt **Differenzenquotient**. Da $x_0 \in \text{int}(D)$, existiert $\delta > 0$, so dass $df_{x_0}(h)$ für alle $h \in B(0; \delta)$ definiert ist. Durch

$$g_h(x) = f(x_0) + df_{x_0}(h)(x - x_0)$$

wird eine Gerade beschrieben: Die Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



Ist f differenzierbar in x_0 , so strebt die Folge der Sekanten gegen die Tangente

$$g_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Beispiele 7.3. (a) (Konstante Funktion). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

f ist stetig differenzierbar.

(b) (Lineare Funktion). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = a \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = a$$

f ist stetig differenzierbar.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \rightarrow 2x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 2x_0.$$

f ist stetig differenzierbar.

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\frac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h)x_0}}{h} = -\frac{1}{(x_0 + h)x_0} \rightarrow -\frac{1}{x_0^2} = f'(x_0)$$

f ist stetig differenzierbar.

(e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Satz 7.4 (Weierstrass'scher Zerlegungssatz). Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \text{int}(D), a \in \mathbb{R}$. Es sind äquivalent:

(a) f ist differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = a$.

(b) Das Restglied

$$(7.2) \quad r(h) = f(x_0 + h) - (f(x_0) + a \cdot h) \text{ erfüllt } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Beweis. Durch Umstellen der Gleichung in (7.2) erhält man

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{r(h)}{h} + a,$$

und damit die Äquivalenz von (7.7) und (7.2). □

Korollar 7.5 (Notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit). Ist $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \text{int}(D)$, dann ist f stetig in x_0 .

Beweis. Sei $x_n \rightarrow x_0$ und damit $h_n = x_n - x_0 \rightarrow 0$. Aus (7.2) folgt nun:

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |r(x_n - x_0) + a(x_n - x_0)| \leq |r(h_n)| + |h_n||a| \rightarrow 0.$$

□

7.1 Differenzierbarkeitsregeln

Proposition 7.6 (Produkt, Quotienten und Kettenregel). *Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \text{int}(D)$. Dann gelten:*

(a) (Summenregel). $(f + g)$ differenzierbar in x_0 und

$$(7.3) \quad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) (Produktregel). $(f \cdot g)$ differenzierbar in x_0 und

$$(7.4) \quad (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(c) (Quotientenregel). Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

(d) (Kettenregel). Sei nun $g : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \in \text{int}(J)$ differenzierbar in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis. (a) siehe Übung

(b) siehe Übung

(c) Es genügt zu zeigen, dass $\frac{1}{g}$ differenzierbar in x_0 ist und $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus der Produktregel. Da g stetig in x_0 und $g(x_0) \neq 0$, $\exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0; \delta) : g(x) \neq 0$. Also gilt für $|h| < \delta$:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) = \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{h} \frac{1}{g(x_0 + h)g(x_0)} \rightarrow -g'(x_0) \frac{1}{g(x_0)^2}.$$

(d) Es gilt für alle $x \in D$ mit $x \neq x_0$:

$$(7.5) \quad \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = d(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mit

$$d(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{falls } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, ist g auch stetig in $y = f(x_0)$. Da f stetig in x_0 ist, folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} d(f(x)) = d(f(x_0)) = g'(f(x_0))$. Durch einen Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ in (7.5) folgt die Behauptung. □

Lemma 7.7 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $J := f(I)$. Ist f differenzierbar in $x_0 \in I$ und ist $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Sei (h_n) Nullfolge mit $h_n \neq 0$ und $y_0 + h_n \in J$. Setze $x_n := f^{-1}(y_0 + h_n)$. Da f stetig und streng monoton ist, folgt mit Satz 6.24, dass f^{-1} stetig und streng monoton ist. Also gilt

$$x_n = f^{-1}(y_0 + h_n) \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0,$$

sowie $x_n \neq x_0$. Wir folgern $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow f'(x_0)$ und damit

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h_n) - f^{-1}(y_0)}{h_n} = \frac{x_n - x_0}{(y_0 + h_n) - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Lemma 7.8. Für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < 1$ gilt

$$\left| \frac{\exp(h) - (\exp(0) + h)}{h} \right| \leq |h| \exp(1).$$

Beweis.

$$\left| \frac{1}{h} \left(\exp(h) - (\exp(0) + h) \right) \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} \right| \leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2}}{k!} \leq |h| \exp(1).$$

□

Lemma 7.9 (Ableitung von exp, ln und Potenzfunktion). (a) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig Differenzierbar und es gilt $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig Differenzierbar und es gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

(c) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Beweis. (a) Aus Lemma 7.8 folgt für $h \rightarrow 0, h \neq 0$:

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{\exp(x+h) - (\exp(x)(1+h))}{h} = \exp(x) \frac{\exp(h) - (\exp(0) + h)}{h} \rightarrow 0.$$

Mit dem Weierstrass'schen Zerlegungssatzes folgt nun $\exp'(x) = \exp(x)$.

(b) Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, folgt die Differenzierbarkeit sowie die Formel für die Ableitung aus Lemma 7.7.

- (c) Gemäß Definition 5.36 gilt $f(x) = \exp(\alpha \ln(x))$. Die Differenzierbarkeit folgt aus der Ketten- und Produktregel. Darüberhinaus berechnen wir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(\alpha \ln(x))(\alpha \ln)'(x) = \alpha \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=\exp(-\ln(x))} \\ &= \alpha \exp(\alpha \ln(x)) \exp(-\ln(x)) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln(x)) = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.10 (Unstetige Ableitung). *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (-1)^k(x - k)((k + 1) - x) \quad \text{für } x \in [k, k + 1) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},$$

ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$. Ausserdem gelten

$$(7.6) \quad \forall x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} : f'(2k) = 1.$$

Betrachte nun

$$g(x) = \begin{cases} x^2 f(\frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

g ist differenzierbar in $x = 0$:

$$\frac{g(h)}{h} = hf(\frac{1}{h}) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Aus der Produkt- und Kettenregel folgt die Differenzierbarkeit von g in $x \neq 0$. Insgesamt erhalten wir

$$g'(x) = \begin{cases} 2xf(\frac{1}{x}) - f'(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Die Ableitung g' ist nicht stetig bei 0, denn mit der Nullfolge $h_n = \frac{1}{2k}$ gilt $g'(h_n) = \frac{1}{2k}f(2k) - 1 \rightarrow -1 \neq g'(0)$.

7.2 Mittelwertsätze und Folgerungen

Definition 7.11 (lokales Extremum). *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $x \in D$ heißt lokales Maximum (bzw. Minimum) von f in D , falls*

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) = \max_{y \in D \cap B(x; \varepsilon)} f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) = \min_{y \in D \cap B(x; \varepsilon)} f(y)).$$

$x \in D$ heißt lokales Extremum von f in D , falls x ein lokales Maximum oder Minimum ist.

Satz 7.12 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema). *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $x \in \text{int}(D)$ ein lokales Extremum und f differenzierbar in x , dann gilt $f'(x) = 0$.*

Beweis. O.B.d.A. sei x Minimalstelle von f . Da x innerer Punkt ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x; \varepsilon) \subset D$. Sei (h_n) eine Nullfolge in $(0, \varepsilon)$. Wegen der lokalen Minimalität gilt $f(x + h_n) - f(x) \geq 0$, also $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \geq 0$. Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ führt auf $f'(x) \geq 0$. Sei nun (h_n) eine Nullfolge in $(-\varepsilon, 0)$. Dann gilt $f(x + h_n) - f(x) \geq 0$ und damit $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \leq 0$ (da der Nenner negativ ist). Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ führt auf $f'(x) \leq 0$. Insgesamt folgt nun $f'(x) = 0$. $\square$

Bemerkung 7.13. • Ein Punkt x mit $f'(x) = 0$ heißt kritischer Punkt von f .

- Nicht jeder kritische Punkt muss ein lokales Extremum sein. Zum Beispiel ist $x = 0$ der einzige kritische Punkt von $x \mapsto x^3$, aber kein lokales Extremum.
- Die Bedingung ist nur für Extremalstellen im Inneren notwendig: $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist extremal bei $x = \pm 1 \in \partial[-1, 1]$.

Satz 7.14 (Satz von Rolle). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) . Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Falls f konstant ist, gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$. Falls f nicht konstant ist, dann gilt $\sup f > f(a)$ oder $\inf f < f(a)$. O.B.d.A. sei $\sup f > f(a)$. Da f stetig in $[a, b]$, existiert nach Satz 6.21 eine Maximalstelle $\xi \in [a, b]$. Wegen $\sup f > f(a) = f(b)$ muss $\xi \in (a, b)$ gelten. Aus Satz 7.12 folgt nun $f'(\xi) = 0$. $\square$

Satz 7.15 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) . Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Beweis. Wende den Satz von Rolle auf die Hilfsfunktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

$\square$

Korollar 7.16 (Mittelwertsatz). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) . Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis. Anwendung von Satz 7.15 mit $g(x) = x$. $\square$

Korollar 7.17 (Monotonie und Ableitung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) . Dann gilt

$$\begin{array}{ll} \forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow f \text{ ist monoton wachsend,} \\ \forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 & \Leftrightarrow f \text{ ist monoton fallend,} \\ \forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend,} \\ \forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend.} \end{array}$$

Beweis. Wie betrachten den Fall wachsender Funktionen. Den Fall einer fallenden Funktion f können wir durch Betrachten von $-f$ auf den wachsenden zurückführen.

- (a) Argument für “ $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ ist monoton wachsend”: Sei $a \leq x < y \leq b$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Die rechte Seite ist nicht-negativ, wegen $f'(\xi) \geq 0$ und $y - x > 0$.
- (b) Argument für “ $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftarrow f$ ist monoton wachsend”: Sei $x \in (a, b)$ und (h_n) eine Nullfolge mit $h_n > 0$. Dann gilt wegen der Monotonität und der Differenzierbarkeit

$$0 \leq \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \rightarrow f'(x).$$

- (c) Argument für “ $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend”: Sei $a \leq x < y \leq b$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Die rechte Seite ist positiv, wegen $f'(\xi) > 0$ und $y - x > 0$.

□

Beispiel 7.18. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

Zur Motivation des nachfolgenden Satzes betrachten wir den Ausdruck $\frac{\ln x}{x-1}$. Wir interessieren uns für das Verhalten $x \rightarrow 1$. Zähler und Nenner konvergieren beide gegen 0, so dass wir formal den Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhalten würden. Dieser ist aber nicht definiert.

Satz 7.19 (Satz von l'Hospital). Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in (a, b) . Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere. Gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty,$$

so existiert auch $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wir behandeln nur den Fall $b \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$. Setze $f(b) = g(b) = 0$, dann sind f, g auf $(a, b]$ stetig. Sei nun (x_n) eine Folge in (a, b) mit Grenzwert b . Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert $\xi_n \in (x_n, b)$ mit

$$(\star) \quad \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n) - f(b)}{g(x_n) - g(b)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)},$$

wobei für die letzte Identität benutzt wurde, dass $f(b) = g(b) = 0$. Aus $x_n \rightarrow b$ folgt $\xi_n \rightarrow b$. Nach Voraussetzung konvergiert der auf der linken Seite in $(\star)$ für $n \rightarrow \infty$.

□

Beispiele 7.20. (a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0. \text{ Per Induktion folgt weiter für alle } n \in \mathbb{N}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{\exp(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0.$$

Definition 7.21 (Höhere Ableitungen). Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $f^{(0)} := f$. f heißt n -mal differenzierbar in $x_0 \in \text{int}(D)$, wenn für die $(n-1)$ -te Ableitung $f^{(n-1)}$ der Grenzwert

$$(7.7) \quad f^{(n)}(x_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert; in diesem Fall nennen wir $f^{(n)}(x_0)$ die n -te Ableitung von f in x_0 .

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. f heißt n -mal stetig differenzierbar in D , falls f n -mal differenzierbar in jedem Punkt ist. Ist außerdem $f^{(n)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so heißt f n -mal stetig differenzierbar in D .

Wir bezeichnen mit

- $C(D) = C^0(D)$ die Menge der stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,
- $C^k(D)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) die Menge der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,
- $C^\infty(D) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(D)$ die Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiele 7.22. (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, ($n \in \mathbb{N}$). Dann $f^{(1)}(x) = f'(x) = nx^{n-1}$ (falls $n > 0$). $f^{(2)}(x) = n(n-1)x^{n-2}$ (falls $n > 1$). Per Induktion folgt $f^{(n)}(x) = n!$ und $f^{(m)}(x) = 0$ für $m > n$. Also gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom mit Grad n so gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(m)}(x) = 0$ für alle $m > n$.

(c) $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\ln \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$.

8 Trigonometrische Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(0) = 1,$$

d.h. das Bild von $x \mapsto \exp(ix)$, $x \in \mathbb{R}$ liegt auf der Kreislinie $\partial B(0; 1) \subseteq \mathbb{C}$. (Wir werden später sehen, dass $[0, 2\pi) \rightarrow \partial B(0; 1)$, $x \mapsto \exp(ix)$ bijektiv ist!).

Definition 8.1 (Analytische Definition von Cosinus und Sinus). Wir definieren $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\cos(x) = \text{Re}(\exp(ix)), \quad \sin(x) = \text{Im}(\exp(ix)).$$

Die Identität

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$$

heißt Euler-Formel.

Wegen $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$ gilt

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Zur Reihendarstellung stellt man zunächst fest, dass aus dem Majorantenkriterium und der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe die beiden reellen Reihen auf den rechten Seiten absolut konvergieren. Durch Addition der Reihen (wobei die Reihe für $\sin$ zuerst mit der imaginären Einheit multipliziert wird) erhalten wir die Reihendarstellung von $\exp(ix)$.

Aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktion erhalten wir unmittelbar:

Proposition 8.2 (Eigenschaften von $\sin$ und $\cos$). *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:*

- (a) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige, gerade Funktion (d.h. $\cos(x) = \cos(-x)$) und $\cos(0) = 1$.
- (b) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige, ungerade Funktion (d.h. $\sin(x) = -\sin(-x)$) und $\sin(0) = 0$.
- (c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. (Folgt aus $|\exp(ix)|^2 = \operatorname{Re}(\exp(ix))^2 + \operatorname{Im}(\exp(ix))^2$.)
- (d) (Additionstheoreme).

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

(Folgt aus $\exp(i(x+y)) = \exp(ix) \cdot \exp(iy)$ durch Vergleich von Real- und Imaginärteil.)

- (e) (Differenzenformel).

$$\begin{aligned}\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).\end{aligned}$$

(Folgt durch Anwendung der Additionstheoreme auf $\frac{1}{2}(x+y) \pm \frac{1}{2}(x-y)$.)

- (f) (Formel von Moivre). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

- (g) (Ableitung). $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Beweis. (a) $\exp$ stetig $\Rightarrow \cos$ stetig. Aus $\exp(0) = 1$ und der Euler Formel folgt $\cos(0) = 1$. Wegen $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$ ist der Cosinus eine gerade Funktion (d.h. es gilt $\cos(x) = \cos(-x)$).

- (b) Beweis wie (a).
 (c) Folgt aus $|\exp(ix)|^2 = 1$ und $|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$.
 (d) Nachrechnen
 (e) Nachrechnen
 (f) $(\cos(x) + i \sin(x))^n = \exp(ix)^n = \exp(inx) = \cos(nx) + i \sin(nx)$.
 (g) Wegen Lemma 7.8 gilt für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\exp(\pm ih) - \exp(0)}{h} = \frac{\exp(\pm ih) - (1 \pm ih)}{h} \pm i \rightarrow \pm i.$$

Also,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{1}{2i} \left(\exp(ix) \frac{\exp(ih) - \exp(0)}{h} - \exp(-ix) \frac{\exp(-ih) - \exp(0)}{h} \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2i} \left(\exp(ix)i - \exp(-ix)(-i) \right) = \frac{1}{2} (\exp(ix) + \exp(-ix)) \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Also gilt $\sin'(x) = \cos(x)$. Aus $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ folgt nun $\cos'(x) = \sin'(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$. Aus $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ folgt nun, dass $\sin$ und $\cos$ beliebig oft stetig differenzierbar sind. □

Lemma 8.3 (Einschließungslemma für $\sin$ und $\cos$). Für $x \in (0, 2]$ gilt

$$(8.1) \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$(8.2) \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x.$$

(Beachte: Auf beiden Seiten stehen jeweils Partialsummen der Reihendarstellung.)

Beweis. Die Reihendarstellung von $\cos$ lautet

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad a_k = \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Für $x \in (0, 2]$ ist (a_k) monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}_+$. Im Beweis des Leibniz-Kriteriums haben wir für solche Reihen gezeigt, dass

$$s_{2m-1} < \cos(x) < s_{2m}, \quad s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k.$$

Für $m = 1$ erhalten wir $s_1 = 1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = s_2$ und damit die Behauptung. Für $\sin$ setze $a_k = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und argumentiere wie oben. □

Lemma 8.4 (Nullstelle von $\cos$). *Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf $(0, 2)$ streng monoton fallend und hat in $(0, 2)$ genau eine Nullstelle.*

Beweis. (a) Existenz der Nullstelle. Es gilt $\cos(0) = 1$ und mit Lemma 8.3: $\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3}$. Da $\cos$ stetig ist folgt die Existenz der Nullstelle mit dem Zwischenwertsatz.

(b) Monotonie und Eindeutigkeit der Nullstelle. Strenge Monotonie impliziert Injektivität und damit die Eindeutigkeit der Nullstelle. Die strenge Monotonie sieht man wie folgt: Nach dem Einschließungskriterium ist $\sin$ auf $(0, 2)$ positiv. Wegen $\cos'(x) = -\sin(x)$ gilt $\cos'(x) < 0$ für $x \in (0, 2)$. Also ist $\cos$ streng monoton fallend gemäß Korollar 7.17. $\square$

Definition 8.5 (Analytische Definition von π). *Die Nullstelle von $\cos$ auf dem Intervall $(0, 2)$ heißt $\frac{\pi}{2}$.*

Bemerkung 8.6. *In der Elementargeometrie definiert man die Zahl π als den Flächeninhalt der Kreisscheibe mit Radius 1 und approximiert sie durch die Flächeninhalte von regelmäßigen n -Ecken mit Eckpunkten auf dem Rand der Kreisscheibe für $n \rightarrow \infty$. Dabei erhält man $\pi \approx 3,14159265\dots$. Wir zeigen später, dass beide Definitionen übereinstimmen. Man kann zeigen, dass π irrational und transzendent ist (d.h. es gibt kein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, das π als Nullstelle hat).*

Korollar 8.7. (a) $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

(b) $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$, $\exp(i\pi) = -1$, $\exp(i\frac{3}{2}\pi) = -i$, $\exp(2\pi i) = 1$.

(c) (Periodizität). $\exp(ix + 2\pi ik) = \exp(ix)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos(x), & \cos(x + \frac{\pi}{2}) &= -\sin(x), \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x), \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin(x), & \cos(x + 2k\pi) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Beweis. (a) $|\sin(\frac{\pi}{2})|^2 = |\exp(i\frac{\pi}{2})|^2 - |\cos(\frac{\pi}{2})|^2 = 1$. Also $\sin(\frac{\pi}{2}) \in \{\pm 1\}$. Aus Lemma 8.3 folgt nun $0 \leq \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2})^3/3 < \sin(\frac{\pi}{2})$ und damit $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(b) Mit der Euler Formel gilt $\exp(i\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$. Alle anderen Formeln folgen aus der Funktionalgleichung von $\exp$.

(c) $\exp(ix + 2\pi ik) = \exp(ix) \exp(2\pi i)^k = \exp(ix)$.

(d) Die Identitäten folgen aus den Additionstheoremen und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Beispiel: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(x) + \sin(x)\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$. $\square$

Korollar 8.8. (a) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ist eine streng monoton wachsende, bijektive Funktion.

(b) $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist eine streng monoton fallende, bijektive Funktion.

(c) Die Abbildung $x \mapsto \exp(ix)$ von $\mathbb{R}$ nach $\partial B(0; 1)$ ist surjektiv.

Beweis. (b) **1.** $\cos$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend (Lemma 8.4). Da $\cos$ eine gerade Funktion ist, folgt dass $\cos$ auf $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ streng monoton wachsend ist. Aus $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ folgt schließlich, dass $\cos$ auch auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ streng monoton fallend ist.

2. $\cos$ ist stetig und es gilt $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -\cos(0) = -1$. Mit dem Zwischenwertsatz finden wir nun auch für jedes $y \in (-1, 1)$ ein $x \in (0, \pi)$ mit $\cos(x) = y$. Also ist $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ surjektiv und wegen der strengen Monotonie auch injektiv, also bijektiv.

(a) Die Behauptung folgt aus (b) und der Formel $\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$.

(c) Sei $z = a + ib \in \partial B(0; 1) \subseteq \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wegen $1 = a^2 + b^2$ gilt dann $a \in [-1, 1]$. Nach (b) existiert $x \in [0, \pi]$ mit $\cos(x) = a$. Aus $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - a^2 = b^2$ folgt nun $\sin(x) \in \{\pm b\}$. Im Fall $\sin(x) = b$ erhalten wir $z = a + ib = \cos(x) + i \sin(x) = \exp(ix)$. Im Fall $\sin(x) = -b$ folgt (da $\sin$ ungerade und $\cos$ gerade), dass $z = a + ib = \cos(-x) + i \sin(-x) = \exp(-ix)$. (Bemerkung: das hier gefundene x ist eindeutig in $(-\pi, \pi]$ bestimmt).

□

Definition 8.9 (Trigonometrische Funktionen). (i) **Tangens**

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

(ii) **Cotangens**

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(iii) **Hyperbolischer Sinus und Cosinus**

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

(iv) Die Funktionen **Arcus-Sinus, -Cosinus und -Tangens**

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

sind als Umkehrfunktion von

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

definiert.

Beispiel 8.10. $\tan, \arcsin, \arccos, \arctan$ sind alle stetig und im Inneren ihres Definitionsbereiches beliebig oft differenzierbar. Es gilt zum Beispiel (mit der Quotientenregel):

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - (\sin(x)(-\sin(x)))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1,$$

sowie

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Definition 8.11 (Polardarstellung komplexer Zahlen). Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung

$$z = |z| \exp(i\varphi)$$

für ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Die Zahl φ ist (für $z \neq 0$) eindeutig bis auf Addition mit $2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bestimmt. Das eindeutige $\varphi \in (-\pi, \pi]$ heißt Argument von z . Die Darstellung heißt Polardarstellung.

Bemerkung 8.12. (a) Betrachte $z = |z| \exp(i\varphi)$. Geometrisch ist $|z|$ der Abstand von z zum Ursprung in der komplexen Zahlenebene. Dreht man die reelle Halbachse $\mathbb{R}_+$ um den Winkel φ so erhält man den Strahl vom Ursprung durch z .

(b) Hierbei wird der Winkel φ im Bogenmaß gemessen, wobei $2\pi = 360^\circ$.

(c) Für $z_1 = |z_1| \exp(i\varphi_1), z_2 = |z_2| \exp(i\varphi_2)$ gilt

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Insbesondere sehen wir, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(i\varphi) \cdot z$$

eine Drehung (entgegen dem Uhrzeigersinn) um den Winkel φ entspricht. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir beispielsweise eine Linksdrehung um 90° .

(d) Spezielle Werte von $\cos$ und $\sin$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Argument für $x = \frac{\pi}{4}$: Es gilt $\cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = -\sin(-\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Aus $1 = \cos^2 + \sin^2$ folgt demnach $2\sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1$. Also $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- Argument für $x = \frac{\pi}{3}$: Setze $z = \exp(i\frac{\pi}{3})$. Dann gilt $z^3 = \exp(i\pi) = -1$. Also $0 = z^3 + 1 = z(z+1)(z-1+\frac{1}{z})$ und damit $1 = z + \frac{1}{z} = \exp(i\frac{\pi}{3}) + \exp(-i\frac{\pi}{3}) = 2\cos(\frac{\pi}{3})$. Es folgt $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
- Argument für $x = \frac{\pi}{6}$: $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, und damit auch $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Lemma 8.13. n -te Wurzel Für $n \in \mathbb{N}_+$ setze $\zeta_n := \exp(i\frac{2\pi}{n})$. Die komplexe Zahlen $\zeta_n^0, \dots, \zeta_n^{n-1}$ heißen n -te-Einheitswurzeln. Es gilt

$$(\zeta_n^k)^n = 1 \text{ für alle } k = 0, \dots, n-1.$$

A Musterlösungen von ausgewählten Hausaufgaben

Aufgabe A.0.1 (Blatt 6 Aufgabe 10). (a) Beweisen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und

$$n \in \mathbb{N}_+ \text{ die Beziehung } \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a} \text{ gilt.}$$

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $2^n \leq n!$?

Lösung. (a) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n-1} a^k$, $b_n := \frac{1-a^n}{1-a}$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid s_n = b_n\}.$$

Für $n = 1$ erhalten wir unmittelbar $s_1 = \sum_{k=0}^{1-1} a^k = a^0 = 1 = \frac{1-a^1}{1-a}$.

Sei nun $n \in M$. Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=0}^n a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^k + a^{(n+1)-1} = s_n + a^n \stackrel{n \in M}{=} b_n + a^n = \frac{1-a^n}{1-a} + a^n \\ &= \frac{1}{1-a} ((1-a^n) + (1-a)a^n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = b_{n+1}. \end{aligned}$$

Folglich ist auch $n+1 \in M$ und M ist induktiv. Die Behauptung folgt nun mit dem Induktionsprinzip (Korollar 2.9).

(b) Für $n = 1, 2, 3$ ist $n! < 2^n$. Für $n = 4$ gilt erstmalig $2^4 = 16 < 4! = 24$. Wir vermuten, dass die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ erfüllt ist. Diese Menge kann auch als $\{n+4 : n \in \mathbb{N}\}$ geschrieben werden. Dies nutzen wir für einen Induktionsbeweis, indem wir folgende Menge M einführen

$$M := \{n \in \mathbb{N} : 2^{n+4} \leq (n+4)!\}.$$

Für $n = 0$ folgt $2^{0+4} = 2^4 = 16 < (0+4)! = 24$, also ist $n = 0 \in M$.

Sei nun $n \in M$ gegeben. Für $n+1$ erhalten wir

$$2^{(n+1)+4} = 2^{(n+4)+1} = 2 \cdot 2^{n+4} \stackrel{n \in M}{\leq} 2 \cdot (n+4)! \stackrel{n+5 > 2}{<} (n+5) \cdot (n+4)! = ((n+1)+4)!.$$

Folglich ist auch $n+1 \in M$ und M ist induktiv. Die Behauptung folgt nun mit dem Induktionsprinzip (Korollar 2.9). □

Aufgabe A.0.2 (Blatt 7 Aufgabe 2). Wir betrachten Metriken auf dem Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) (Manhattan-Metrik). Zeigen Sie, dass durch

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert wird.

b) (Maximum-Metrik). Zeigen Sie, dass durch

$$d_{\infty}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert wird.

c) Zeichnen Sie die Einheitskugeln $B(0; 1)$ bezüglich der Manhattan-Metrik und der Maximum-Metrik.

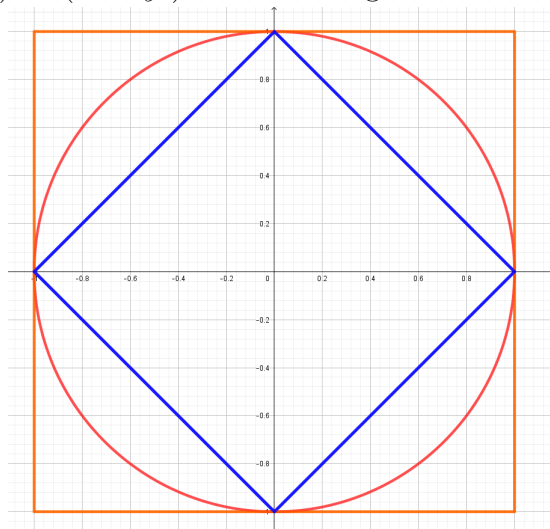
Lösung. (a) Die Metrikeigenschaften von d_1 ergeben sich aus den Metrikeigenschaften der Betragsmetrik in $\mathbb{R}$. Gegeben seien $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

- $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$ und $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0 \wedge |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$,
- $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(y, x)$,
- $d_1(x, y) = |(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)| + |(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = d_1(x, z) + d_1(z, y)$.

(b) Die Metrikeigenschaften von d_{∞} ergeben sich aus den Metrikeigenschaften der Betragsmetrik in $\mathbb{R}$. Gegeben seien $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

- $d_{\infty}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq 0$ und $d_{\infty}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0 \wedge |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$,
- $d_{\infty}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d_{\infty}(y, x)$,
- Zunächst ist $d_{\infty}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq \max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\}$. Nun $|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \leq d_{\infty}(x, z) + d_{\infty}(z, y)$ und $|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \leq d_{\infty}(x, z) + d_{\infty}(z, y)$, woraus $d_{\infty}(x, y) \leq d_{\infty}(x, z) + d_{\infty}(z, y)$ folgt.

(c) Im Bild bezeichnet Orange die d_{∞} Einheitskugel und Blau die d_1 Kugel. Im Bild ist auch die Kugel $B(0; 1)$ bezüglich die euklidische Metrik $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ mit Rot eingezeichnet.



□

Aufgabe A.0.3 (Blatt 8 Aufgabe 2 b) und e)). Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwerte:

(a) $a_n := \frac{1+2+\dots+n}{n^2},$

(b) $a_n := \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$

Lösung. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \cdot \prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k^2} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \cdot \prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^n k^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \prod_{k=3}^{n-1} k^2 \cdot n(n+1)}{2^2 \cdot \prod_{k=3}^{n-1} k^2 \cdot n^2} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe A.0.4 (Blatt 8 Aufgabe 6). Geben Sie jeweils zwei reelle Nullfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an, so dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{a_n}{b_n}$

(a) eine Nullfolge ist;

(b) gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert;

(c) divergiert;

(d) uneigentlich konvergiert.

Lösung. Als erstes bemerken wir, dass $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen sind.

(a) Falls $a_n := \frac{1}{n^2}$ und $b_n := \frac{1}{n}$, ist $c_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge.

(b) Falls $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n}$, folgt $c_n = 1$ und damit $c_n \rightarrow 1$.

(c) Falls $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n}$, folgt $c_n = (-1)^n$, die eine divergente Folge ist.

(d) Falls $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n^2}$, konvergiert $c_n = n$ uneigentlich gegen $+\infty$.

□

Aufgabe A.0.5 (Blatt 9 Aufgabe 6 c)). Wir betrachten die folgende rekursiv definierte reelle Folge (a_n) :

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

Beweisen Sie vor dieser Aufgabe, dass aus $x_n \geq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$ folgt.

Lösung. Zuerst zeigen wir, dass aus $x_n \geq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$ folgt. Als erstes betrachten wir den Fall $x = 0$. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ folgt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad x_n = |x_n| < \varepsilon^2.$$

Das impliziert $|\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$ und damit $\sqrt{x_n} \rightarrow 0$. Falls $x > 0$, folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > 0$

$$(A.1) \quad \exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \quad \sqrt{x_n} + \sqrt{x} > C.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, existiert für $C\varepsilon > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$(A.2) \quad \forall n \geq n_1 : \quad |x_n - x| < C\varepsilon.$$

(A.1) und (A.2) implizieren

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \left| \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \right| = \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} < \frac{C\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Das bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

Weiter zeigen wir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ und wir bestimmen den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$. Wir beweisen induktiv, dass $a_n \in [1, 2)$ gilt und die Folge (a_n) streng monoton wächst. Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 \in [1, 2)$. Sei nun $a_n \in [1, 2)$. Für a_{n+1} erhalten wir

$$1 < \sqrt{2} \leq a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1 + 2} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Also ist auch $a_{n+1} \in [1, 2)$. Für den Nachweis der Monotonie betrachten wir zunächst die Differenz $a_2 - a_1$. Für diese gilt

$$a_2 - a_1 = \sqrt{1 + 1} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0.$$

Sei nun $a_n - a_{n-1} > 0$. Dann folgt

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{1 + a_n}^2 - \sqrt{1 + a_{n-1}}^2 = a_n - a_{n-1} > 0.$$

Wegen $a_n \in [1, 2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bedeutet dies auch $a_{n+1} - a_n > 0$ und damit die streng wachsende Monotonie von (a_n) . Somit existiert $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, wobei gilt:

$$c = \sqrt{1 + c} \stackrel{c \geq 0}{\Leftrightarrow} c^2 - c - 1 = 0 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Wegen $a_n \in [1, 2)$ kommt nur $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ in Frage.

□

B Ergänzendes Material

In diesem Appendix werden (nach und nach) ergänzende Materialien zur Vorlesung bereitgestellt. Ein Ziel ist hierbei die Inhalte der Vorlesung zu vertiefen, zu ergänzen und durch einen Perspektivenwechsel alternative Zugänge zum Verständnis der Vorlesungsinhalte zu ermöglichen.

Die mathematischen Strukturen werden in den Vorlesungen typischerweise linear (und nach Methoden geordnet) entwickelt. Jedoch sind die verschiedenen Strukturen, die Sie in dieser und anderen Grundlagenvorlesung kennenlernen vielfältig vernetzt. Häufig sind gerade die Querverbindungen zwischen den verschiedenen mathematischen Disziplinen (und anderen Wissenschaften) besonders interessant. Daher ist ein weiteres Ziel dieses Kapitels, die Inhalte der Vorlesung in einem neuen Kontext zu betrachten und Beispiele für (inner- und außermathematische) Anwendungen zu geben. Hierbei möchten wir vermehrt problemorientiert (und nicht nur methodenorientiert) vorgehen.

Inhalte, die ausschließlich in diesem Appendix thematisiert werden, werden nicht in der Prüfung abgefragt. Bitte diskutieren Sie über die Inhalte dieses Kapitels in ihren Arbeitsgruppen und nutzen Sie das OPAL-Forum um Fragen zu stellen, Antworten zu geben, oder interessante Beobachtungen zu dokumentieren.

In einigen Abschnitten werden wir mittels Simulationen die mathematischen Strukturen der Vorlesung untersuchen. Insbesondere Beweise und Strukturen algorithmischer Natur (z.B. Folgen, die durch Rekursionsvorschriften definiert sind) können durch das Programmieren oft intuitiver und besser verstanden werden. Die präsentierten Programme sind in MATLAB verfasst. Als Student/in an der TU Dresden haben Sie die Möglichkeit MATLAB-online über die Campus-Lizenz zu benutzen. Auf MATLAB-online können Sie über den Link <https://matlab.mathworks.com/> zugreifen. Bei der ersten Benutzung müssen Sie einen “Account” einrichten und dort ihre TU-Dresden Email-Adresse angeben. Eine Open-Source-Alternativ zu MATLAB ist GNU Octave <https://www.gnu.org/software/octave/>. Die angegebenen Codes sollten mit minimalen Modifikationen auch in Octave funktionieren.

Zum Schluss dieser Einleitung eine kleine Warnung: Die angegebenen Beispiel-Codes haben nicht den Anspruch Beispiele für effizientes Programmieren oder vorbildliche Software-Entwicklung zu sein — diese Aspekte (liegen ausserhalb meiner Expertise) und werden in Vorlesungen zum Programmieren, der numerischen Analysis oder im wissenschaftlichen Rechnen thematisiert.

B.1 Folgen numerisch untersuchen — erste Schritte in MATLAB

Im Computer können wir Folgen berechnen und visualisieren. Allerdings kann der Computer keine (unendlich langen) Folgen, sondern nur “Folgenfragmente” mit endlicher Länge abbilden. Dies geschieht z.B. durch die Datenstruktur *Array*.

(a) Durch den Befehl

```
% Erzeuge ein Liste-Array der Länge 5
x=zeros(5,1);
```

wird ein Array (im Format 5×1) mit dem Namen `x` und 5 Einträgen erzeugt, wobei die Einträge alle auf 0 gesetzt sind. Mit `% Kommentar` kann der Programm-Code kommentiert werden. Auf einzelne Einträge kann wie folgt zugegriffen werden:

```
x(1)=1;
x(2)=2;
x
x(2)
```

Der obige Code setzt den ersten Eintrag der Liste auf 1 und den zweiten auf 2. Danach wird zunächst das ganze Array mit dem Befehl `x` ausgegeben und danach der zweite Eintrag. Das Semikolon in den ersten beiden Zeilen verhindert, dass das Ergebnis der Programmzeile angezeigt wird. Sie können auch auf Abschnitte des Arrays zugreifen; z.B. wird durch

```
y=x(1:4)
```

eine Array mit Namen `y` und Länge 4 erzeugt, dessen ersten vier Einträgen auf die Werte der ersten vier Einträge von `x` gesetzt werden.

- (b) Durch den Befehl

```
x=[0;2;1;4;3;6;5;8;7]
```

wird ein Array mit 9 Einträgen erzeugt, wobei die Einträge auf die angegebenen Werte gesetzt werden.

- (c) Die numerischen Werte der einzelnen Einträge kann man in einem Diagramm visualisieren:

```
x=[0;2;1;4;3;6;5;8;7];
plot(x, ".")
```

Schreibt man `plot(x)`, so werden die Punkte mit Linien verbunden.

- (d) Arrays kann man auch mit Schleifen füllen. Beispiel:

```
% Länge der Folgenfragments
N=20;
% Mit 0 gefülltes Array der Länge N erzeugen
x=zeros(N,1);
% Schleife durchläuft n=1,...,N und setzt das nte Folgenglied auf n*n
for n=1:N
    x(n)=n*n;
end
% Plotte des Folgenfragments
plot(x, ".")
```

Möchte man die Länge des Folgenfragments nicht vorher festlegen, sondern Folgenglieder berechnen so lange eine Kriterium erfüllt ist, so kann man eine **while**-Schleife benutzen. Beispiel: Wir betrachten die Rekursionsfolge

$$x_1 = 1, \quad x_n = \frac{x_{n-1}}{n}.$$

Diese Folge strebt gegen 0. Nachfolgender Code berechnet alle Folgenglieder, so lange $x_n \geq \varepsilon$ (für $\varepsilon = 0.000001$) erfüllt ist, d.h. das letzte berechnete Folgenglied erfüllt zum ersten mal $x_n < \varepsilon$.

```
% Setze epsilon
eps=0.000001;
% Setze Index $n=1$ und setze erstes Folgenglied
n=1;
x(n)=1;
while (x(n)>=eps)
    n=n+1;
    x(n)=x(n-1)/n;
end
% Anzahl der Folgenglieder
length(x)
% Plotten des Folgenfragments
plot(x, ".")
```

Der Befehl `length(x)` gibt die Länge des Arrays zurück.

- (e) Es können auch Arrays mit zufälligen Einträgen erzeugt werden:

```
% Länge der Folgenfragments
N=100;
% Mit zufällinge Zahlen gefuelltes Array der Laenge N erzeugen,
% die Zahlen werden gleichverteilt
% aus dem Intervall [0,1) gezogen.
x=rand(N,1);
% Plotten des Folgenfragments
plot(x, ".")
```

- (f) Wir können auch Folgenfragmente mit Werten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ darstellen. Hierzu benutzen wir ein Array im Format $n \times 2$. Durch `x=zeros(N,2)\verb` wird ein solches Format erzeugt. Wir können uns `x` als eine Tabelle mit `N` Zeilen und 2 Spalten vorstellen. Jede Zeile steht für ein Folgenglied. Der Befehl `x(2,:)` liefert die Zweite Zeile zurück - ein Array im Format 1×2 . Beispiel: Nachfolgender Code erzeugt ein Folgenfragment der Form $x_n = (n, 2 * n)$:

```
% Länge der Folgenfragments
N=10;
% Mit 0 gefuelltes Array der Laenge N erzeugen
```

```

x=zeros(N,2);
% Schleife durchlaueft n=1,...,N und
% setzt das nte Folgenglied auf (n,n*n)
for n=1:N
    x(n,:)= [n, 2*n];
end
% Plotten der Punkte mit Koordinaten (x(i,1),(i,2)) für i=1 bis N
scatter(x(:,1),x(:,2))

```

- (g) Häufig werden Folgen durch Vorschriften der Form $x_n = f(x_n)$ definiert, wobei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist. Das kann wie folgt umgesetzt werden:

```

% Länge der Folgenfragments
N=100;
% Funktion f(n):=1/(n+1) definieren
f=inline("1/(n+1)");
% Mit 0 gefuelltes Array der Laenge N erzeugen
x=zeros(N,1);
% Schleife durchlaueft n=1,...,N und
% setzt das nte Folgenglied auf f(n)
for n=1:N
    x(n)=f(n)
end
% Plotten
plot(x, ".")

```

- (h) Fallunterscheidungen können durch die if-Struktur abgebildet werden. Beispiel:

```

% Länge der Folgenfragments
N=10;
% Mit 0 gefuelltes Array der Laenge N erzeugen
x=zeros(N,1);
% Schleife durchlaueft n=1,...,N und
% setzt das nte Folgenglied auf 5, falls n<=3
for n=1:N
    if (n<=3)
        x(n)=5;
    end
end
end

```

Aufgabe B.1.1 (Konvergenz numerische untersuchen). *Untersuchen Sie numerische die Konvergenz der nachfolgenden Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$. Stellen Sie zunächst eine Vermutung über das Verhalten auf. Was könnte ggf. der Grenzwert sein?. Berechnen Sie dann eine Große Anzahl von Folgengliedern und plotten diese.*

$$a) x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad b) x_n = n^2 (0.999)^n \quad c) x_n = \frac{\log n}{n} \quad d) x_n = \frac{c_n}{n} \quad e) x_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Bei d) sollen die Zahlen c_n , $n \in \mathbb{N}$, zufällig im Intervall $(-1, 1)$ gewählt werden. Natürlich kann man bei der numerischen Simulation nie sicher sein, ob tatsächlich eine Konvergenz vorliegt. Berechnen Sie zum Beispiel bei b) die ersten $N \in \{10, 100, 1000, 10000\}$ Folgenglieder.

Aufgabe B.1.2 (Rekursive Folgen). Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist durch $f_0 := f_1 := 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$ rekursiv definiert.

1. Schreiben Sie ein Programm, dass für gegebenes $N \in \mathbb{N}$ die Fibonacci-Zahl $f_1, \dots, f_N$ berechnet.
2. Die Folge f_n ist uneigentlich konvergent gegen $+\infty$. Sie wächst sehr schnell. Eine weitere Folge, die sehr schnell wächst, ist a^n falls $a > 1$. Überprüfen Sie das numerisch. Wir können untersuchen, welche der beiden Folgen schneller wächst, indem wir die Quotienten-Folge $z_n := \frac{f_n}{a^n}$ betrachten. Untersuchen sie numerisch das Verhalten für verschiedene Werte von a , insbesondere für $a \in \{1.1, 1.4, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1.8, 2\}$.

Aufgabe B.1.3 (Monotone Teilfolge). Durch `x=10*rand(N,1)-5` wird ein Array der Länge N mit zufälligen Werten in $(-5, 5)$ erzeugt. Schreiben Sie ein Programm, dass aus x eine monoton wachsende "Teilfolge" y mit maximaler Länge berechnet. Beispielsweise soll $x = (1, 3, 2, 6, 7, 1, 9)$ auf $y = (1, 3, 6, 7, 9)$ abgebildet werden.

Aufgabe B.1.4 ("Überholende" Folge). Sei $a > 0$ fest gewählt. Betrachten Sie die Folgen

$$a_n := \sqrt{n+a} - \sqrt{n}, \quad b_n := \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad c_n := \sqrt{n+\frac{n}{a}} - \sqrt{n}.$$

1. Untersuchen Sie numerisch ob die Folgen strikt geordnet sind, d.h. eine Aussage der Form: " $b_n < a_n < c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ " gilt. Betrachten Sie sowohl den Fall, dass a groß ist (z.B. $a = 100$) als auch den Fall, dass a klein ist (z.B. $a = 4$). Hinweis: Sie können mehrere Arrays in eine Abbildung plotten, z.B. durch den Befehl `hold on`. Dieser verhindert, dass beim Aufruf eines `plot`-Befehls das vorhandene Diagramm gelöscht wird:

```
plot(a, ".");
hold on;
plot(b, ".");
plot(c, ".");
```

2. Zeigen Sie, dass eine der Aussagen gilt:

$$n < a^2 \Rightarrow a_n < b_n < c_n,$$

$$n < a^2 \Rightarrow b_n < a_n < c_n,$$

$$n < a^2 \Rightarrow c_n < b_n < a_n.$$

3. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen und vergleichen Sie die Anordnung der Grenzwerte mit dem Ergebnis aus 2.

Aufgabe B.1.5 (Limes superior). Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Der Limes Superior ist durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$$

definiert. Der Grenzwert auf der rechten Seite existiert (möglicherweise als uneigentlicher Grenzwert), da durch $y_n := \sup_{k \geq n} x_k$ eine monoton fallende Folge definiert wird.

1. Schreiben Sie ein Programm, dass aus einem gegebenen Folgenfragment $x_1, \dots, x_N$ ein neues Folgenfragment $y_1, \dots, y_N$ mit $y_n := \max\{x_k : n \leq k \leq N\}$ berechnet und anschließend beide Arrays plottet. Hinweise: Ist **a** ein Array, so gibt **max(a)** das Maximum aller Einträge in **a** zurück.
2. Wenden Sie das Programm auf zufällige, alternierende, monoton wachsende oder fallende Folgen an.

B.2 Wurzeln berechnen und Bisektion

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Sei $I_1 = [x_1, y_1)$ ein Intervall mit $x_1 \leq f(a) < y_1$. Wir definieren rekursiv eine Folge von Intervallen $I_n = [x_n, y_n)$ durch

$$I_{n+1} = [x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} [x_n, \frac{x_n + y_n}{2}) & \text{falls } x_n \leq f(a) < \frac{x_n + y_n}{2}, \\ [\frac{x_n + y_n}{2}, y_n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe B.2.1. 1. Es gilt $I_n \subseteq I_{n-1}$ für alle n , d.h. die Intervallfolge bildet eine Intervallschachtelung. Da nach Konstruktion $f(a) \in I_n$ für alle n , folgern wir, dass $f(a) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} I_n$.

2. Es gilt $|y_n - x_n| \leq 2^{-n} |y_1 - x_1|$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \geq 1}$ und $(y_n)_{n \geq 1}$ Cauchy-Folgen sind und gegen $f(a)$ konvergieren. Folgern Sie, dass $\{f(a)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} I_n$.

Im Falle $f(a) = \sqrt{a}$ berechnet der Algorithmus die Quadratwurzel von a . Dies kann wie folgt implementiert werden:

```
% Bisektionsalgorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel
% Setze a
a=2;
% Anzahl der Iterationen
N=100;
% Initialisiere eine Liste I mit N Intervallen. Jeder Eintrag ist auf 0
% gesetzt. Das n-te Intervall wird durch [ I(n,1),I(n,2) ) dargestellt.
I=zeros(N,2);
% Setze Startintervall. Es muss die Quadratwurzel von a enthalten!
I(1,:)= [0,2];
% Berechne rekursiv die andere Intervalle
for n = 2:N
    % Berechne die Mitte des n-1 Intervalls
    m = 0.5*(I(n-1,2)+I(n-1,1));
    % Prüfe ob a^(1/2) im Intervall [I(n-1,0), m) liegt, in dem die
```

```

% geprüft wird, ob die Ungleichung  $a < m^2$  erfüllt ist
if check_intervall(I(n-1,1),m,a)
    % Falls wahr, setze neues Intervall auf  $[I(n-1,1),m)$ 
    I(n,1)=I(n-1,1);
    I(n,2)=m;
else
    % Andernfalls, setze neues Intervall auf  $[m,I(n-1,2))$ 
    I(n,1)=m;
    I(n,2)=I(n-1,2);
end
end
% Darstellung der Ergebnisse
% Fehler berechnen
error=0.5*(I(N,2)+I(N,1))-a^(1/2)
%scatter(1:N,0.5*(I(:,1)+I(:,2)));
errorbar(1:N,0.5*(I(:,1)+I(:,2)),I(:,2)-I(:,1));

```

```

% Prüfe ob Wurzel von a im Intervall  $[x,y)$  enthalten ist
function result = check_intervall(x,y,a)
    result = (x^2<=a) & (a<y^2);
end

```

Das Prüfen ob $\sqrt{a}$ im Intervall $[x, y)$ enthalten ist, ist in die Funktion `check_intervall(x,y,a)` ausgelagert. Beachten Sie, dass hierbei ausgenutzt wird, dass für $a, x, y \geq 0$ die Äquivalenz

$$\sqrt{a} \in [x, y) \quad \Leftrightarrow \quad a \in [x^2, y^2)$$

gilt.

Aufgabe B.2.2 (nte Wurzel). Sei $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}_+$

(a) Zeigen Sie: Es existiert genau eine Zahl $x > 0$ mit $x^n = a$. Diese Zahl heißt nte Wurzel von a . Notation: $\sqrt[n]{a}$. (Hinweise: Beweis ist ähnlich wie der Beweis zur Existenz der Quadratwurzel).

(b) Modifizieren Sie den obigen Algorithmus so, dass dieser die nte Wurzel berechnet.

Aufgabe B.2.3 (Quadratwurzel schneller berechnen). Ein anderer Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel ist folgender (siehe Vorlesung):

```

% Anzahl der Folgenglieder
N=10;
% Initialisiere eine Liste mit N Einträgen. Jeder Eintrag ist auf 0 gesetzt
x=zeros(N,1);
% Setze a
a=2;
% Setze Startwert x_1 auf 1
x(1)=1;

```

```

% Rekursives Berechnen der Einträge 2 bis N
for n = 2:N
    x(n)=0.5*( x(n-1) + a / x(n-1) );
end
% Darstellung der Ergebnisse
% Fehler berechnen
error=x(N)-a^(1/2)
% Zeichne die Einträge x(2), ..., x(N) durch markieren der Punkte (n,x(n))
scatter(2:N, x(2:N));

```

B.3 Periodische Folgen

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt periodisch, falls eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}_+$ mit

$$x_{n+p} = x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

existiert. Man nennt p in diesem Fall eine Periode der Folge. Eine Folge ist periodisch genau dann, wenn

$$p_* := \inf\{p \in \mathbb{N}_+ : x_{n+p} = x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ungleich $+\infty$ ist. In diesem Fall ist p_* die kleinste Periode der Folge.

Aufgabe B.3.1. Der Befehl `mod(a,b)` gibt den Rest der Division von a mit b zurück.

1. Sei $a \in \mathbb{N}_+$. Visualisieren Sie die Folge $x_n := \text{Rest der Division von } n \text{ mit } a$. Bestimmen Sie analytisch die kleinste Periode der Folge.
2. Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$. Betrachten Sie die Folgen $x_n := \text{Rest der Division von } n \text{ mit } a$, $y_n := \text{Rest der Division von } n \text{ mit } b$. Visualisieren Sie die Folge $z_n := x_n + y_n$. Was ist die kleinste Periode dieser Folge?