
**Algebra und höhere Mathematik 1 für Medieninformatik -
WS2022/23**

Übung 3: Vektoren und Matrizen

Aufgaben mit Lösungshilfe

Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise und -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 16: Gegeben seien die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- (a) Berechnen Sie die Länge der Vektoren a , $a + b$ sowie $a_0 := \frac{1}{\|a\|} \cdot a$.
- (b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $a \cdot b$ und $b \cdot a$.
- (c) Welchen Winkel schließen die Vektoren a und b ein?
- (d) Berechnen Sie die Länge des Vektors $d = a + 2b - c$.
- (e) Bestimmen Sie einen Vektor mit Länge 1, der zum Vektor c linear abhängig ist.
- (f) Bestimmen Sie einen Vektor f , der dieselbe Länge wie a besitzt, jedoch zu b linear abhängig ist.

Hinweis: Die in der Aufgabe benannten Begriffe 'Skalarprodukt' und 'Länge' beziehen sich auf das kanonische Skalarprodukt und die dadurch induzierte Norm $\|\cdot\|_2$.

Aufgabe 17: Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f : x \mapsto y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad (1)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$ bildet mit den Operationen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

für alle Funktionen f, g der Form (1) und alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Vektorraum V über \mathbb{R} .

- (a) Geben Sie die den Nullvektor bildende Funktion $o \in V$ an.
- (b) Gegeben sind die Funktionen h_1 und h_2 mit Funktionstermen

$$h_1(x) = x^4 - 4x^2 \quad \text{und} \quad h_2(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

Ermitteln Sie den Funktionsterm der Funktion $k \in V$ mit $(h_1 + h_2 + k)(x) = o(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (c) Stellen Sie die Funktionsgraphen G_{h_1} , G_{h_2} und G_k im Intervall $x \in [-2, 2]$ in einem Koordinatensystem graphisch dar.

Interpretieren Sie die Summe $h_1 + h_2$ der Funktionen aus Aufgabenteil ((b)).

(d) Stellen Sie die zum Funktionsterm $g(x) = 2x^4 + 4x^2 - 7$ gehörende Funktion g als Linearkombination der folgenden Funktionen dar:

$$f_0 : x \mapsto 1, \quad f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto x^2, \quad f_3 : x \mapsto x^3 \quad \text{und} \quad f_4 : x \mapsto x^4 \quad (2)$$

(e) Stellen Sie die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Funktionsterm

$$h(x) = \sum_{k=0}^4 (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot f_k(x)$$

in der Form (1) dar und berechnen Sie die Koeffizienten.

Aufgabe 18: Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks ABC in \mathbb{R}^3 unter Verwendung der Vektorprodukte der Ortsvektoren \vec{OA} , \vec{OB} und \vec{OC} .

Zeigen Sie, dass diese Formel ein zyklisches Vertauschen der Ortsvektoren gestattet.

Aufgabe 19: Berechnen Sie für die reellen quadratischen Matrizen

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right\}$$

jeweils die Matrizen $A_s = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ und $A_a = \frac{1}{2}(A - A^\top)$.

Was fällt Ihnen an den Matrizen A_s und A_a auf?

Definition: Eine reelle quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1..n}$ heißt *symmetrisch*, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle Indexwerte i und j gilt. Die Matrix A heißt *schiefsymmetrisch* oder *antisymmetrisch*, falls abweichend von oben $a_{ij} = -a_{ji}$ gilt.¹

Aufgabe 20: Überprüfen Sie durch Rechnung den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen.

(a) Die Vektoren

$$v_1 = (0 \ 2 \ 0)^\top \quad \text{und} \quad v_2 = (0 \ 0 \ 2)^\top$$

bilden keine Basis des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$, jedoch eine Basis des Untervektorraums $U \subset V$ mit $x_1 = 0$ und $\dim U = 2$.

(b) Jede reelle Matrix vom Typ $(2, 2)$ ist eindeutig als Linearkombination der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellbar.

Definition: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* von V , wenn mit je zwei Vektoren

$$u_1 \in U \quad \text{und} \quad u_2 \in U$$

auch jede Linearkombination

$$(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) \quad \text{mit} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

in U enthalten ist.

¹Für schiefsymmetrische Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1..n}$ gilt insbesondere, dass $a_{ii} = 0$ für alle Indexwerte i , d. h. in der Hauptdiagonalen von A ist jede Komponente Null.

Selbstständige Bearbeitung

Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den „Aufgaben mit Lösungshilfe“ an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 21: Prüfen Sie die folgenden Vektoren aus \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 jeweils auf lineare Unabhängigkeit und geben Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren an.

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 22: Gegeben ist der \mathbb{R} -Vektorraum V aller linearen Funktionen $f : x \mapsto y = f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ mit gemeinsamem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ sowie Koeffizienten $a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_1 \in \mathbb{R}$.

In V werden insbesondere die Funktionen

$$f_0 : x \mapsto y = f_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad f_1 : x \mapsto y = f_1(x) = x$$

betrachtet.

- (a) Weisen Sie nach, dass $B = [f_0, f_1]$ eine Basis des Vektorraums V bildet.
- (b) Zeigen Sie, dass mit B aus Aufgabenteil (a) auch $\tilde{B} = [f_0 + f_1, f_0 - f_1]$ eine Basis von V bildet.

Aufgabe 23: Gegeben sind im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte.

- (a) $a \cdot b$
- (b) $a \times b$
- (c) $a \cdot (b \times c)$
- (d) $a \cdot (b \cdot c)$
- (e) $(a \times b) \times c$
- (f) $a \times (b \times c)$
- (g) $\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$
- (h) $(a \times c) \cdot (b \times c)$

Hinweis: Das Symbol \times bezeichnet hierbei das Vektorprodukt, während das Symbol \cdot für verschiedene Produktbildungen gesetzt ist