P-Aufgabe Woche 2.

Name. Jiaqi Ge.
Matrikel-Nr.: 5271503

A1.

a). Vektorraum: Ein Vektorraum ist eine Menge von Vektoren, die bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

orthogonale Basis: orthogonale Basis sind linear unabhängige Basis eines Vektorraumes, wobei das Skarlarprodukt zweier beliebiger Basisvektoren Null gibt.

Skalarprodukt: Die einzelnen komponenten der Vektoren miteinander multipliziert werden und anschließend die Produkte addierst werden.

Vektornorm: die Länge des Vektors durch Quadratwurzel des Skalarprodukts definiert werden.

b). Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ bilden zusammen einen rechten Winkel d.h. das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt immer Null.

c). Zwei beliebige dieser drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden zusammen einen rechten Winkel. d.h. das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt immer Null, und sie sind linear unabhängig voneinander.

d). Wenn die Bedinung von c). erfüllt sind, ist die Länge jedes Vektor also Norm gleich 1.

e).

i. $\langle \underline{b}^1, \underline{b}^2 \rangle = \langle \cos(x), \sin(x) \rangle$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \cdot \sin(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \, dx$$

$$= 0$$

d.h. $\underline{b}^1$ und $\underline{b}^2$ sind zueinander orthogonal.

ii.

Die Funktionen f im Unterraum des $C[-\pi, \pi]$ mit folgenden Linearkombination von $\underline{b}^1$ und $\underline{b}^2$ dargestellt werden.

$$f = \lambda_1 \underline{b}^1 + \lambda_2 \underline{b}^2 = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$$

iii.

für λ_1.

$$\langle f(x), \cos(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_1 \cos^2(x) + \lambda_2 \sin(x) \cos(x) \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_1 \cos^2(x) \, dx$$

$$= \lambda_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) \, dx$$

$$= \lambda_1 \langle \cos(x), \cos(x) \rangle$$

$$= \lambda_1 \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

für λ_2

$$\langle f(x), \sin(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(x) \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_1 \cos(x) \sin x + \lambda_2 \sin^2(x) \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_2 \sin^2(x)\, dx$$

$$= \lambda_2 \langle \sin(x), \sin(x) \rangle$$

$$= \lambda_2 \pi$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x)\, dx$$

A_2:

a).

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dx^0} \left((x^2-1)^0 \right) = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2-1) = x$$

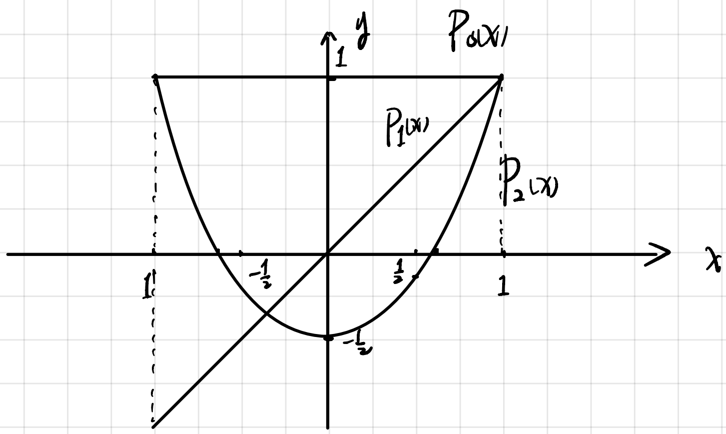
$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left((x^2-1)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{d^2}{dx^2} (x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{d}{dx} (4x^3 - 4x)$$

$$= \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

b).



c).

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx.$$

Ja. jeweils paarweise zueinander orthogonal sind

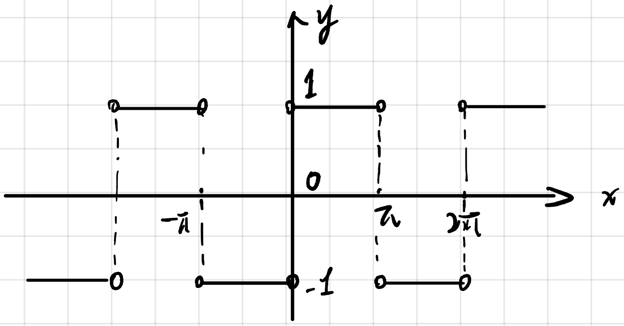
A3:

Fourier-Polynome mit Fourier-Koeffizienten C_k konvergieren im quadratischen. Mittel gegen Funktion f.

A4:
a)

das Rechtecksignal

$$f(x) \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < \pi \\ 0 & ; \quad x = 0, \; x = \pi, \; x = -\pi \\ -1 & ; \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$



zeitlicher Mittelwert $= 0$

$$a_0 = C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} -1\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 1\, dx$$

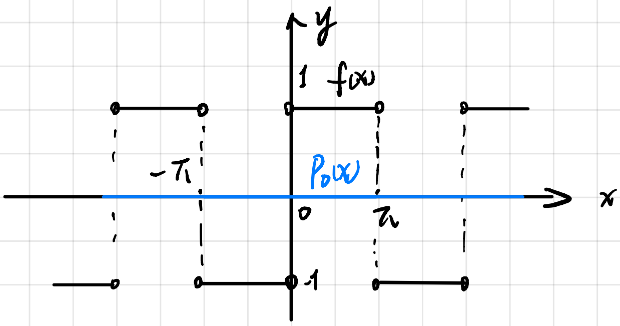
$$= \frac{1}{2} (-1 + 1)$$

$$= 0$$

genauso wie zeitlicher Mittelwert.

b).

$P_0(x) = a_0 = 0 \quad x \in [-\pi, \pi)$



c).

Die DC-component eines periodischen Signals ist der Mittelwert des Signals über eine Zeitperiode.

genauso wie $c_0 = a_0$, was den zeitlichen Mittelwert von der Funktion f über eine Periode

Im Fall des Rechtssignals, bedeutet $c_0 = 0$, dass das Signal keine DC-Component hat.

A5.

a).

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ -x, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

weil $f(x)$ gerade ist. ist $b_k = 0$

d.h. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx$$

Es sei $kx = u$ $\quad (u \in [0, k\pi))$ $\Rightarrow x = \frac{u}{k}$

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{k\pi} \frac{u}{k}\cos(u)\,d\frac{u}{k}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\int_0^{k\pi} u\,d\sin(u).$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left(u\sin(u)\Big|_0^{k\pi} - \int_0^{k\pi}\sin(u)\,du\right)$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\cos u\Big|_0^{k\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{-4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade ist} \\ 0, & k \text{ gerade ist} \end{cases}$$

$$= \frac{-4}{\pi (2k+1)^2}$$

d.h. $P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

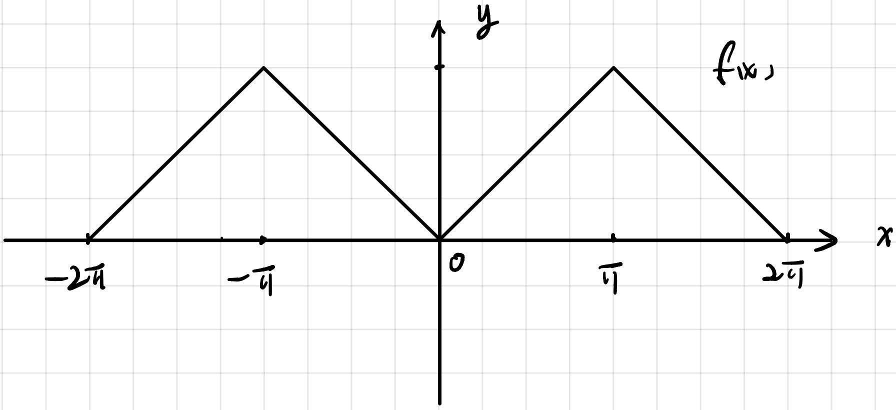
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

$$= f(x)$$

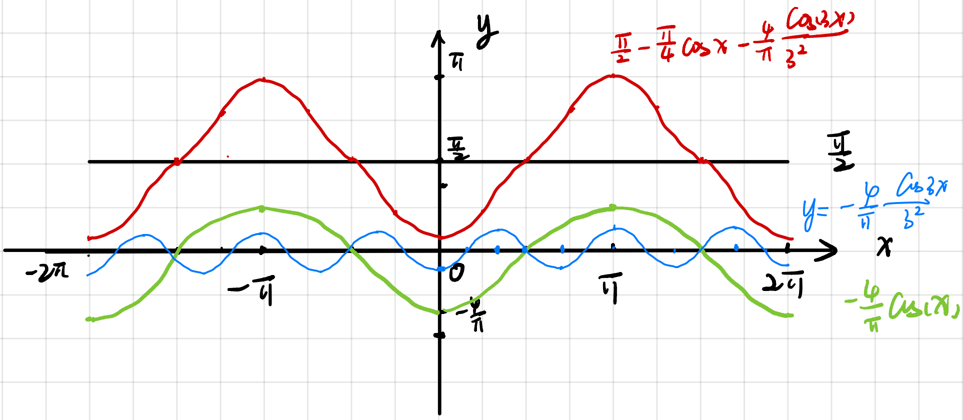
d.h. $f(x)$ drückt unendliche Summe von Kosinusfunktionen aus.

ist eine Fourier-Reihe

b).



c).



die Sikizze der ersten 3 Summanden sind ähnlich wie die der Fuktion $f(x)$ in b)

A6.

a).

Cauchy-Kriterium.: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > m > N: |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$.

Leibniz-Kriterium: Ist a_n monoton fallend und $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

dann $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert.

Majorantenkriterium.: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und $\forall n \geq N$ gilt $|a_n| \leq b_n$

so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

b)

$$F(x) = a_0 + \sum_{k\geq 1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$= a_0 + \sum_{k\geq 1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k)$$

$$\leq |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k \cdot \cos(kx + \varphi_k)|$$

$$\leq |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$$

um eine Bedingung für die Konvergenz der Fourier-Reihe für alle x zu ermitteln, muss $|A_k|$ konvergent sein.

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < \infty$$

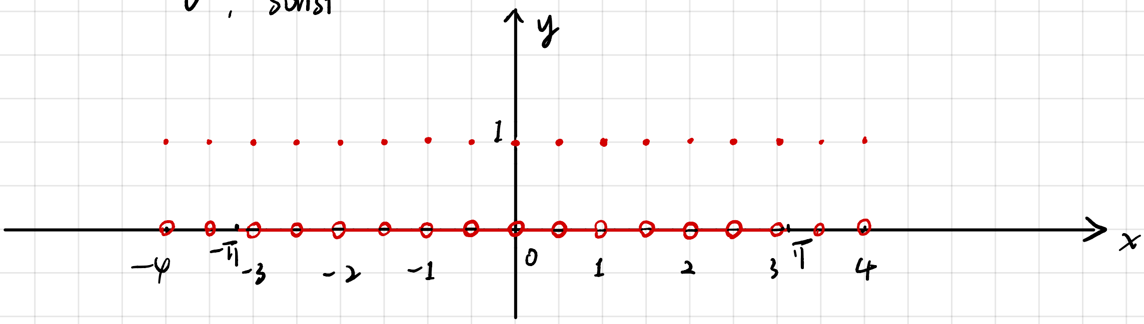
$$\Rightarrow \lim_{k \to 0} |a_k| = 0$$

$$\lim_{k \to 0} |b_k| = 0$$

Um die Reihe für alle x zu konvergieren, sollen $|a_k|$ und $|b_k|$ so schnell wie möglich nach 0 gehen.

A7.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 2x \in \mathbb{Z}. \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Da $f(x)$ gerade und 2π-periodisch ist, ist $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\,dx + \cdots + \int_3^{\pi} 0\,dx\right) = 0$$

ebenfalls $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx = 0$

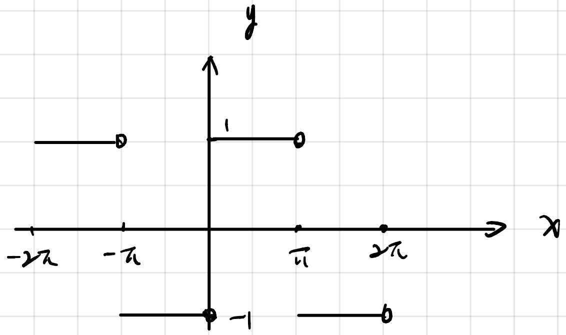
d.h. alle Fourierkoeffizienten sind 0.

für $2x \in \mathbb{Z}$. $P(x) = \dfrac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = 0 \neq 1$

d.h. wenn $x \in [-\pi, \pi]$ und $2x \notin \mathbb{Z}$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$.

A8.

a).



diese Funktion ist nicht stetig.

b). Nein. Ein Beispiel dafür ist Rechteckfunktion, die durch unendliche Fourier-Reihe dargestellt wird. Dann gibt es Sprungstellen, was eine Nicht-Stetigkeit verursacht.

c). $$F(0) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)0)}{2k+1} = 0$$

$f(0) = 1$

weil $F_n(0) = 0 \neq f(0)$, ist die Reihe nicht punktweise gegen $f(x)$ konvergiert.