a.

M_0={0}
R_0={({},{}),({0},{0})}
M_1={0,1}
R_1={({},{}),({0},{0}),({0},{1}),({0,1},{0,1}),({1},{0}),({1},{1})}
M_2={0,1,2}

R_2= {
({},{}),({0},{0}),({0},{1}),({0},{2}),({0,1},{0,1}),({0,1},{0,2}),({0,1},{1,2}),({0,1,2},{0,1,2}),({0,2},{0,1}),({0,2},{0,2}),({0,2},{1,2}),({1},{0}),({1},{1}),({1},{2}),({1,2},{0,1}),({1,2},{0,2}),({1,2},{1,2}),({2},{0}),({2},{1}),({2},{2})
}

b.
Um zu beweisen, dass die Relation $R(M_7)$ eine Äquivalenzrelation ist, betrachte ich die drei notwendigen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Reflexivität: Jede Menge $X \subseteq M_7$ hat die gleiche Anzahl von Elementen wie sich selbst, also ist $(X,X) \in R(M_7)$ für alle $X \in 2^{M_7}$. Das zeigt die Reflexivität.

Symmetrie: Wenn $(X,Y) \in R(M_7)$, dann haben X und Y die gleiche Anzahl von Elementen. Da diese Beziehung beidseitig ist, gilt auch $(Y,X) \in R(M_7)$. Das zeigt die Symmetrie.

Transitivität: Wenn $(X,Y) \in R(M_7)$ und $(Y,Z) \in R(M_7)$, dann haben X und Y die gleiche Anzahl von Elementen und Y und Z ebenfalls. Dies impliziert, dass X und Z auch die gleiche Anzahl von Elementen haben, also ist $(X,Z) \in R(M_7)$. Das zeigt die Transitivität.

Da $R(M_7)$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, ist es eine Äquivalenzrelation.

c.

Die möglichen Mächtigkeiten für die Teilmengen von M_7 sind 0 bis 8, weil M_7 insgesamt 8 Elemente hat. Das bedeutet, es gibt eine Äquivalenzklasse für jede Mächtigkeit:

-Eine Äquivalenzklasse für Teilmengen der Mächtigkeit 0 (nur die leere Menge).

-Eine Äquivalenzklasse für Teilmengen der Mächtigkeit 1 (alle ein-elementigen Teilmengen).

-Eine Äquivalenzklasse für Teilmengen der Mächtigkeit 2 (alle zwei-elementigen Teilmengen).

-…

-Eine Äquivalenzklasse für Teilmengen der Mächtigkeit 8 (die Menge M_7 selbst).

Das ergibt insgesamt 9 Äquivalenzklassen für $R(M_7)$, eine für jede mögliche Mächtigkeit von 0 bis 8.

d.

1.Äquivalentsklasse
Beipsiel: $\varnothing$
Mächtigkeit: 0

2.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1}
Mächtigkeit: 1

3.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1,2}
Mächtigkeit: 2

4.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1,2,3}
Mächtigkeit: 3

5.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1,2,3,4}
Mächtigkeit: 4

6.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1,2,3,4,5}
Mächtigkeit: 5

7.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1,2,3,4,5,6}
Mächtigkeit: 6

8.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1,2,3,4,5,6,7}
Mächtigkeit: 7

9.Äquivalentsklasse
Beipsiel: {1,2,3,4,5,6,7,8}
Mächtigkeit: 8

Es teilt in $n+1$ Äquivalenzklassen wobei ein Repräsentant jeder Klasse die Menge M_n ist.