Aufgabe 1:

Ein System sei durch die Lagrange-Funktion $L(q,\dot{q},t) = (\dot{q}+q)^2 + 4\,q\dot{q}t$ beschrieben, wobei die generalisierte Koordinate q und die Zeit t geeignet gewählte dimensionslose Größen seien.

(a) Wie lautet die Lagrange-Gleichung sowie deren allgemeine Lösung?

(b) Geben Sie eine einfachere äquivalente Lagrange-Funktion $L^*(q,\dot{q})$ an, die dasselbe System beschreibt. Warum führen beide Lagrange-Funktionen zu derselben Bewegungsgleichung?

a) Lagrange - Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left[2(\dot{q}+q) + 4qt\right]$$

$$= 2\ddot{q} + \underline{2\dot{q}} + \underline{4\dot{q}t} + \underline{4q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 2(\dot{q}+\underline{q}) + \underline{4\dot{q}t}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 2\ddot{q} + 2q = 2(\ddot{q}+q) \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \quad \ddot{q} = -q \quad (*)$ harmonischer Oszillator mit Freq. $\omega = 1$

$\Rightarrow \quad q(t) = A\cos(t+\alpha)$ ist allg. Lösung

b) Finde ein anderes System mit gleicher Losung.

harmonischer Oszillator taucht bei linearen Rückstellkräften auf:

$$F(q) = -\alpha m q$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{q} \underset{\text{Newton}}{=} F(q) = -\alpha m q$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{q} = -\alpha q$$

Das entspricht (*) für $\alpha = 1$.

Potential zu F ist $V(q) = \dfrac{q^2}{2}$

$$\Rightarrow \text{Lagrangefunktion: } L^* = T - V = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2}$$

führt auf dieselbe Lagrangegleichung (*).

Frage: Was ist der Zusammenhang zwischen L u. L^*?
Mit anderen Worten: Welche Transformationen lassen die Lagrange-Glg. invariant?

Antwort: Für alle α u. hinreichend glatte $F(q,t)$:

$$L^* = \underline{\alpha L} + \frac{d}{dt} F(q(t),t) \overset{\text{Ketten}}{\underset{\text{regel}}{=}} \underline{\alpha L} + \underline{\dot{q} \frac{\partial F}{\partial q}} + \underline{\frac{\partial F}{\partial t}}$$

auf dieselbe BWGL wie L:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q} - \frac{\partial L^*}{\partial q} = \alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)$$

$$+ \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} - \dot q \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$$

$$+ 0 - \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\overset{\text{Kettenregel für } \frac{\partial F(q(t),t)}{\partial q}}{=} \alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) + \dot q \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial q}$$

$$- \dot q \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\overset{\text{Satz von Schwarz}}{=} \alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ BWGL invariant

Was sind α u. F in dem Fall?

$$L \overset{!}{=} \alpha L^* + \frac{d}{dt}F(q,t) = \underline{\frac{\alpha}{2}\dot q^2} - \frac{\alpha}{2}q^2 + \frac{d}{dt}F$$

$$\overset{!}{=} (\dot q + q)^2 + 4q\dot q t$$

$$= \dot q^2 + q^2 + 2\dot q q + 4q\dot q t$$

Der erste Term legt $\alpha = 2$ nahe

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} F(q,t) \overset{!}{=} 2q^2 + 2\dot{q}q(1+2t)$$

$$= q^2 \frac{d}{dt}(1+2t) + \frac{d}{dt}(q^2)(1+2t)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{q^2(1+2t)}_{= F(q,t)}\Big)$$

Aufgabe 2:

Eine Rotationsfläche sei in Zylinderkoordinaten gegeben durch $\rho = \rho(z)$ für $z \in [z_1, z_2]$. Der Flächeninhalt dieser Rotationsfläche ist

$$F = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} dz\, \rho \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2}.$$

Begründung: Wir zerlegen das Intervall $[z_1, z_2]$ in infinitesimale Abschnitte der Länge dz. In jedem dieser Abschnitte können wir die Kurve durch eine Gerade annähern. Rotiert man diese Gerade um die z-Achse, so erhält man die Mantelfläche eines *Kegelstumpfs* mit der Höhe dz und den Radien $\rho(z)$ und $\rho(z + dz) = \rho(z) + d\rho(z) = \rho(z) + \rho'(z)\, dz$. Der Flächeninhalt der Mantelfläche ist

$$dF = 2\pi\rho \sqrt{dz^2 + d\rho^2} = 2\pi\rho \sqrt{1 + (\rho')^2}\, dz.$$

Die Gesamtfläche erhalten wir durch Summation über alle Abschnitte dz, was die Behauptung ergibt.

Die Radien $\rho_1 = \rho(z_1)$ und $\rho_2 = \rho(z_2)$ seien fest vorgegeben. Ziel der Aufgabe ist, die Funktion $\rho(z)$ zu finden, für die der Flächeninhalt F minimal, also auch stationär, wird.

(a) Leiten Sie aus der Bedingung

$$\delta F = 0$$

eine (Eulersche) Differentialgleichung für $\rho(z)$ her. Dies ist analog zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen 2. Art aus dem Hamiltonschen Prinzip. Die resultierende Gleichung direkt zu lösen, ist schwierig.

(b) Der Integrant in F hängt nicht explizit von z ab. Leiten Sie daraus eine Beziehung für ρ und ρ' her.

(c) Lösen Sie die in (b) erhaltene Gleichung. *Hinweis*:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{Arcosh}\, \frac{x}{a} + C.$$

(a) Rotationsfläche für geg. Funktion $\rho(z)$, $z \in [z_1, z_2]$:

$$F[\rho] = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} dz\, \rho(z) \sqrt{1 + \rho'(z)^2} \equiv \int_{z_1}^{z_2} dz\, f(\rho(z), \rho'(z))$$

ist Funktional von ρ.

Wir suchen Minimierer von F.

Variation von F (Verallg. d. Ableitung) ist definiert als „Richtungsableitung" in Richtung einer Testfunktion $\varepsilon(z)$, die super glatt ist und $\varepsilon(z_1) = \varepsilon(z_2) = 0$ erfüllt:

$$\tilde{F}(t) := F[\rho + t\varepsilon]$$

mit Variation

$$\delta F_\varepsilon[\rho] := \tilde{F}'(t) = \frac{d}{dt} F[\rho + t\varepsilon]\Big|_{t=0}$$

hier

$$\delta F_\varepsilon[\rho] = \int_{z_1}^{z_2} dz \, \frac{d}{dt} f\Big(\rho(z) + t\,\varepsilon(z),\ \rho'(z) + t\,\varepsilon'(z)\Big)\Big|_{t=0}$$

Ketten-regel

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \left[\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{d}{dt}\Big(\rho(z) + t\,\varepsilon(z)\Big)\Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial \rho'} \frac{d}{dt}\Big(\rho'(z) + t\,\varepsilon'(z)\Big)\Big|_{t=0} \right]$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \left[\frac{\partial f}{\partial \rho} \varepsilon(z) + \frac{\partial f}{\partial \rho'} \underbrace{\varepsilon'(z)}_{= \frac{d\varepsilon}{dz}} \right]$$

Partielle Int.

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \, \frac{\partial f}{\partial \rho} \varepsilon(z) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \rho'} \varepsilon(z)\Big|_{z_1}^{z_2}}_{= 0 \text{ da } \varepsilon \text{ auf Rand verschwindet}} - \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho'}\right) \varepsilon(z)$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial \rho'} \right) \varepsilon(z)$$

Wir fordern Stationarität:

$$\delta F_\varepsilon[\rho] = \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial \rho'} \right) \varepsilon(z) \overset{!}{=} 0$$

für alle Testfunktionen $\varepsilon(z)$.

$$\Rightarrow \boxed{0 = \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial \rho'}} \quad \text{Euler Lagrange Gleichung} \quad (*)$$

hier: $f(\rho(z), \rho'(z)) = \cancel{2\pi}\, \rho(z) \sqrt{1 + \rho'(z)^2}$

unwichtig

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \sqrt{1 + (\rho')^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho'} = \frac{\rho \rho'}{\sqrt{1 + (\rho')^2}}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial \rho'} = \frac{(\rho')^2 + \rho\rho''}{\sqrt{1+(\rho')^2}} - \frac{1}{2}\frac{\rho\rho' 2 \rho'\rho''}{[1+(\rho')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{[(\rho')^2 + \rho\rho''][1+(\rho')^2] - \rho(\rho')^2\rho''}{[1+(\rho')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{(\rho')^2 + (\rho')^4 + \rho\rho'' \cancel{+ \rho\rho''(\rho')^2} \cancel{- \rho(\rho')^2\rho''}}{[1+(\rho')^2]^{3/2}}$$

$$0 = \frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial \rho'} - \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{(\rho')^2 + (\rho')^4 + \rho\rho'' \cancel{+\rho\rho''(\rho')^2} \cancel{-\rho(\rho')^2\rho''}}{\left[1+(\rho')^2\right]^{3/2}}$$

$$- \frac{\left(1+(\rho')^2\right)^2}{\left[1+(\rho')^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{(\rho')^2 \cancel{+(\rho')^4} + \rho\rho'' \cancel{+\rho\rho''(\rho')^2} \cancel{-\rho(\rho')^2\rho''} \ldots}{\left[1+(\rho')^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\ldots -1 - 2(\rho')^2 \cancel{-(\rho')^4}}{\left[1+(\rho')^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{-(\rho')^2 + \rho\rho'' - 1}{\left[1+(\rho')^2\right]^{3/2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{1 + (\rho')^2 - \rho\rho'' = 0}$$

nichtlineare, gewöhnliche, DGL 2. Ordnung (**)

→ schwer direkt zu lösen

b) Die Euler-Lagrange Gleichung (*) ist formal äquivalent zu einer Lagrange Gleichung 2. Art aus der Mechanik mit folgenden Identifikationen:

$$\rho(z) \leftrightarrow q(t)$$

$$z \leftrightarrow t$$

$$f(\rho(z), \rho'(z)) \leftrightarrow L(q(t), \dot{q}(t))$$

Insbesondere beobachten wir, dass f nicht von z abhängt und somit „zeitunabhängig" ist.
Das legt nahe, dass die Hamiltonfunktion

$$h := p_\rho \rho' - f$$

mit $p_\rho := \frac{\partial f}{\partial \rho'}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Wir berechnen

$$p_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho'} \rho \sqrt{1+(\rho')^2} = \frac{\rho \rho'}{\sqrt{1+(\rho')^2}}$$

und damit

$$h = \frac{\rho(\rho')^2}{\sqrt{1+(\rho')^2}} - \rho\sqrt{1+(\rho')^2}$$

$$= \frac{\rho(\rho')^2 - \rho(1+(\rho')^2)}{\sqrt{1+(\rho')^2}}$$

$$= -\frac{\rho}{\sqrt{1+(\rho')^2}}$$

ist bezüglich z konstant, denn

$$\frac{dh}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho'}\rho' - f\right) = \underbrace{\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho'}\right)}_{\underset{\text{Euler Lagrange}}{=} \frac{\partial f}{\partial \rho}} \rho' + \frac{\partial f}{\partial \rho'}\rho'' - \frac{df}{dz}$$

Mit

$$\frac{d f(\rho(z), \rho'(z))}{dz} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\rho' + \frac{\partial f}{\partial \rho'}\rho''$$

folgt

$$\frac{dh}{dz} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\rho' + \frac{\partial f}{\partial \rho'}\rho'' - \frac{\partial f}{\partial \rho}\rho' - \frac{\partial f}{\partial \rho'}\rho'' = 0$$

Damit ist

$$\frac{\rho}{\sqrt{1+(\rho')^2}} = -h = \text{const.} =: a > 0 \quad (\text{da } \rho > 0)$$

die gesuchte Beziehung zwischen ρ u. ρ'.
Damit haben wir die Ordnung der DGL (**) reduziert, was das Problem lösbar macht.
Wir formen um

$$\rho^2 = a^2\left(1+(\rho')^2\right) = a^2 + a^2(\rho')^2$$

$$\Leftrightarrow \rho' = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\rho^2 - a^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1} \qquad (***)$$

c) (***) sind zwei separierende DGL 1. Ordnung
$\Rightarrow$ Trennung d. Variable

$$\int_{z_0}^{z} d\tilde{z}\,\frac{\rho'(\tilde{z})}{\sqrt{\left(\frac{\rho(\tilde{z})}{a}\right)^2 - 1}} = \int_{\rho(z_0)}^{\rho(z)} d\rho\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1}} \stackrel{!}{=} \pm\int_{z_0}^{z} dz\, 1 = \pm(z - z_0)$$

Wir lösen das Integral

$$\int_{\rho(z_0)}^{\rho(z)} d\rho \, \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1}} \underset{r := \frac{\rho}{a}}{=} a \int_{\rho(z_0)/a}^{\rho(z)/a} dr \, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{r^2 - 1}}}_{= \frac{d}{dr} \operatorname{Arcosh} r}$$

$$= a \left[\operatorname{Arccosh}\left(\frac{\rho(z)}{a}\right) - \operatorname{Arccosh}\left(\frac{\rho(z_0)}{a}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arccosh}\left(\frac{\rho(z)}{a}\right) = \pm \frac{z}{a} \underbrace{\mp \frac{z_0}{a} + \operatorname{Arccosh}\left(\frac{\rho(z_0)}{a}\right)}_{\equiv \frac{b}{a} = \text{const.}}$$

$$\equiv \pm \frac{z+b}{a}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\rho(z) = a \cosh\left(\pm \frac{z+b}{a}\right) = a \cosh\left(\frac{z+b}{a}\right)}$$

wobei a u. b durch Randbedingungen $\rho_1 = \rho(z_1)$, $\rho_2 = \rho(z_2)$ festgelegt sind.

Alternativlösung zu a): „Wackle" an ρ gemäß „kleiner" Störung $\delta\rho$ mit festen Randwerten: $\delta\rho(z_1) = 0 = \delta\rho(z_2)$

$$F[\rho+\delta\rho] = \int_{z_1}^{z_2} dz\, f\big(\rho(z)+\delta\rho(z),\ \rho'(z)+\delta\rho'(z)\big)$$

$$\underset{\substack{\text{Taylor}\\ \text{bzgl.}\\ \rho(z)}}{=} \int_{z_1}^{z_2} dz\, f\big(\rho(z),\ \underline{\rho'(z)+\delta\rho'(z)}\big) + \underline{\frac{\partial f(\rho(z), \rho'(z)+\delta\rho'(z))}{\partial\rho}}\,\delta\rho(z) + \mathcal{O}\big(\delta\rho(z)^2\big)$$

nur 0-te Ordnung in $\delta\rho$ relevant!

$$\underset{\substack{\text{Taylor}\\ \text{bzgl.}\\ \rho'(z)}}{=} \int_{z_1}^{z_2} dz\, \underline{f(\rho(z), \rho'(z))} + \underline{\frac{\partial f}{\partial\rho'}\,\delta\rho'(z)} + \underline{\frac{\partial f(\rho(z), \rho'(z))}{\partial\rho}}\,\delta\rho(z) + \mathcal{O}\big(\delta\rho(z)^2\big)$$

$$\underset{\text{P.I.}}{=} \int_{z_1}^{z_2} dz\, f(\rho(z), \rho'(z)) + \int_{z_1}^{z_2} dz \left[\frac{\partial f}{\partial\rho}\,\delta\rho(z) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho'}\right)\delta\rho(z)\right] + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial\rho'}\,\delta\rho(z)\Big|_{z_1}^{z_2}}_{=0} + \ldots$$

$$= F[\rho] + \int_{z_1}^{z_2} dz\, \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho'}\right)\right]}_{= \left.\frac{\delta F}{\delta\rho(z)}\right|_{\rho} \overset{!}{=} 0} \delta\rho(z) + \ldots$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange Gleichung