Musterlösung

Aufgabe: Man stelle die komplexe Zahl

$$z = \frac{3-2i}{1+e^{i\frac{5\pi}{3}}}$$

in algebraischer Form, also als $x + iy$ dar.

Lösung: Damit man die Formel für die Division anwenden kann, muss zunächst der Nenner in die algebraische Form gebracht werden. Mit der Eulerschen Formel erhält man

$$e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit ist der Nenner gleich

$$1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir berechnen nun die komplexe Zahl, indem wir mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners erweitern:

$$\begin{aligned} z &= \frac{3-2i}{1+e^{i\frac{5\pi}{3}}} = \frac{3-2i}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(3-2i)\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{9}{2} - i3 + i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{9}{3}+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{18 - 12i + 6\sqrt{3}i + 4\sqrt{3}}{12} = \frac{9+2\sqrt{3}}{6} + i\frac{(\sqrt{3}-2)}{2} \approx 2,08 - 0,13i. \end{aligned}$$