

---

## Mathematik 1 - WS2022/23 Übungsblatt 13

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** Gegeben ist ein Ellipsenbogen  $c$  als Graph der Funktion  $f : x \mapsto y = f(x)$  mit

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8}}, \quad x \in D_f.$$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung des Kreisbogens  $k$ , der  $c$  an der Stelle  $x_0 = 0$  berührt und dort dieselbe Krümmung  $\kappa(x_0)$  besitzt. Dieser wird *Schmiegekreis* von  $c$  im Kurvenpunkt  $P(x_0; f(x_0))$  genannt.

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern Sie existieren. Verwenden Sie dazu, wenn möglich, die Regel von l'Hospital.

(a)  $\lim_{x \searrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{\sin^2 x}$

(b)  $\lim_{x \nearrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-1}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \cos x}{x^2}$

(d)  $\lim_{x \searrow 0} x \cdot \ln x$

(e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{2x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(g)  $\lim_{x \searrow 0} x^x$

(h)  $\lim_{x \searrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

**Aufgabe 3:** Gegeben ist die Gleichung

$$1 = 2 \cdot \frac{\ln 3}{x^2} \tag{1}$$

- (a) Geben Sie Intervalle möglichst kleiner Länge mit ganzzahligen Intervallgrenzen an, zwischen denen jeweils Lösungen  $x^*$  der Gleichung (1) liegen.
- (b) Bestimmen Sie eine Lösung  $x^*$  der Gleichung (1) auf 4 Nachkommastellen gerundet mithilfe des Newton-Verfahrens.

**Aufgabe 4:**

- (a) Begründen Sie, dass sich die Quadratwurzel einer reellen Zahl  $a > 0$  darstellen lässt als positive Nullstelle der Funktion  $f$  mit

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$$

- (b) Berechnen Sie die Zahl  $\sqrt{11}$  auf vier Nachkommastellen gerundet mithilfe des Newton-Verfahrens. Wählen Sie als Startwert  $x_0 = 4$ .

---

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

**Aufgabe 6:** Gegeben ist die Gleichung

$$\tan x = x + 2 \quad \text{für } x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

- (a) Treffen Sie eine begründete Aussage darüber, wie viele Lösungen die Gleichung in Formelzeile (2) im angegebenen Intervall besitzt.
- (b) Berechnen Sie näherungsweise alle Lösungen der Gleichung (2) im angegebenen Intervall nach dem Tangentenverfahren von Newton. Geben Sie die Lösungen auf vier Dezimalstellen nach dem Komma gerundet an.

**Aufgabe 7:** Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto y = f(x) = x^3 + x - 12$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Geben Sie ganze Zahlen an, zwischen denen eine Nullstelle  $x^*$  von  $f$  liegt.
- (b) Bestimmen Sie  $x^*$  auf 3 Nachkommastellen gerundet mithilfe des Newton-Verfahrens unter Zuhilfenahme des Hornerchemas.