

Teil a

Jede Aussagenvariable $p \in P$ ist eine Formel in $AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$.

Wenn $\phi, \psi \in AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$, dann ist auch $(\phi \vee \psi) \in AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$.

Wenn $\phi, \psi \in AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$, dann ist auch $(\phi \wedge \psi) \in AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$. Damit umfasst $AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$ alle möglichen Formeln, die durch beliebige Kombinationen der Aussagenvariablen aus P unter Verwendung der Operatoren \vee und \wedge gebildet werden können.

Teil b

Formel ϕ mit $\text{size}(\phi) = 1$:

Eine mögliche Formel ist einfach eine einzelne Variable, z. B. $\phi = p$.

Formel ψ mit $\text{size}(\psi) = 5$:

Eine Formel mit einer Größe von 5 könnte beispielsweise $\psi = (p \vee (q \wedge r))$ sein. Hier ist ψ aus drei Variablen und zwei Operatoren aufgebaut (gesamt 5 Elemente).

Formel η mit $\text{size}(\eta) = 11$:

Eine Formel mit einer Größe von 11 könnte $\eta = ((p \vee q) \wedge ((q \vee r) \wedge p))$ sein. Diese Formel enthält vier Operatoren und sieben Variablen und ergibt somit insgesamt eine Größe von 11.

Teil c

$W: P \rightarrow \{0, 1\}$, sodass jede Formel $\phi \in AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$ erfüllt wird. Eine

einfache Möglichkeit ist, jede Variable in P auf 1 zu setzen:

Definiere $W(p) = 1$ für alle $p \in P$. Mit dieser Belegung wird jede Formel in $AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$ wahr, da sowohl das Oder (\vee) als auch das Und (\wedge) mit mindestens einem Operanden gleich 1 zu einem Ergebnis von 1 führen, wenn alle Variablen wahr (1) sind.

Teil d

Induktionsanfang: Für eine atomare Formel $\phi = p$, wobei $p \in P$, gilt per Definition von W $W(p) = 1$. Daher ist ϕ wahr.

Induktionsschritt:

Angenommen, ϕ und ψ sind Formeln in $AL_{\{\vee, \wedge\}}(P)$, die unter der Belegung W erfüllbar sind (d. h., $W(\phi) = 1$ und $W(\psi) = 1$).

Fall 1: $\chi = (\phi \vee \psi)$. Da $W(\phi) = 1$ und $W(\psi) = 1$, ergibt $W(\phi \vee \psi) = 1$. Somit ist χ erfüllbar.

Fall 2: $\chi = (\phi \wedge \psi)$. Da $W(\phi) = 1$ und $W(\psi) = 1$, ergibt $W(\phi \wedge \psi) = 1$. Somit ist auch χ erfüllbar.