Folien zur Lehrveranstaltung

Mathematik für Medieninformatik

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022-23

Kapitel 4

Zahlbereichserweiterungen

Prof. Dr. Marco Hamann
Dipl.-Math. Tommy Etling

HTW Dresden, Wintersemester 2022-23

Inhalt

von Kapitel 4: Zahlbereichserweiterungen

Motivation

für komplexe Zahlen

Beginnen wir mit einem Beispiel: Wie sieht denn die Lösung der Gleichung

$$x^2 + 9 = 0$$

aus? Auflösen der Gleichung nach x führt zunächst zu $x^2 = -9$, Wurzelziehen zu $x = \pm\sqrt{-9}$.

Wurzelziehen aus einer negativen Zahl? Vielleicht vereinfachen wir zunächst so weit wie möglich:

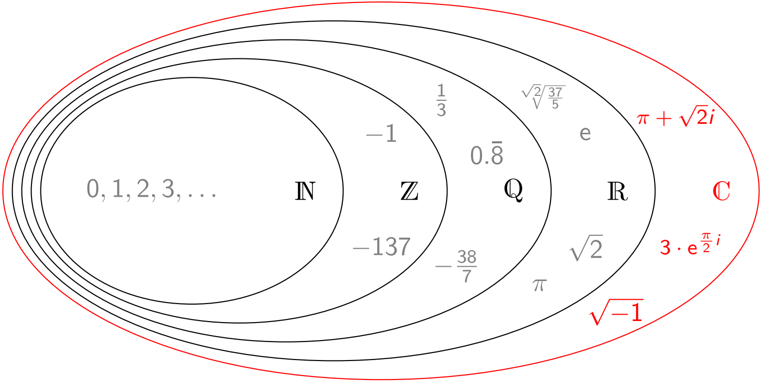
$$x = \pm\sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm 3 \cdot \sqrt{-1}.$$

Wenn wir nun also wüssten, was $\sqrt{-1}$ ist, könnten wir aus jeder negativen Zahl Wurzeln ziehen.

Indem wir die sogenannte imaginäre Einheit i als $i^2 := -1$ definieren, bilden wir das Fundament für die Einführung der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Zahlenmengen

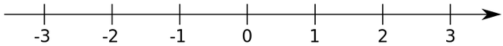
dargestellt als Venn-Diagramm



Die Gauß'sche Zahlenebene

$\mathbb{C}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$

- Zahlenmengen wurden also stets erweitert (z.B. die Einführung von Brüchen, um $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ zu erweitern), um Probleme zu lösen, die in der ursprünglichen Zahlenmenge nicht lösbar waren.
- Etwas Ähnliches machen wir nun auch mit den reellen Zahlen, um Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen zu können.
- $\mathbb{R}$ kann man sich als Zahlenstrahl vorstellen:

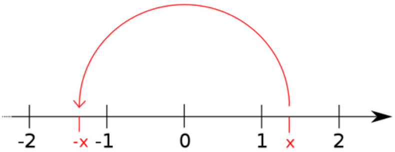


- Die Multiplikation einer positiven reellen Zahl x mit -1 ist nichts Anderes als eine Spiegelung von x am Ursprung:

Die Gauß'sche Zahlenebene

$\mathbb{C}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$

- Die Spiegelung von x am Ursprung könnte man aber auch als Drehung um 180° um den Ursprung interpretieren:



- Da wir $i^2 = -1$ definiert haben, können wir die Spiegelung $x \mapsto -x$ schreiben als

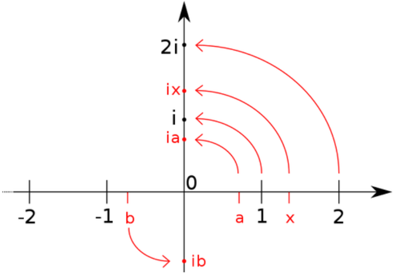
$$x \mapsto -x = -1 \cdot x = i^2 \cdot x = i \cdot (i \cdot x).$$

Wir wenden also zweimal dieselbe Abbildung auf x an (Multiplikation mit i) und als Ergebnis ergibt sich eine Drehung um 180°.

Die Gauß'sche Zahlenebene

$\mathbb{C}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$

- Dann muss die einmalige Multiplikation mit i einer Drehung um 90° um den Ursprung entsprechen:



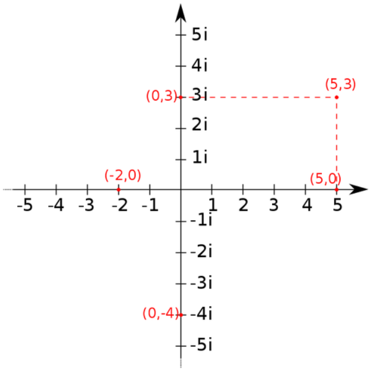
- Diese Vierteldrehung lässt sich analog auch auf andere Zahlen als x übertragen, also insbesondere auch auf negative Zahlen wie b.

Die Gauß'sche Zahlenebene

$\mathbb{C}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$

- Die *x*-Achse in obigem Bild entspricht weiterhin dem reellen Zahlenstrahl, wir nennen ihn nun die reelle Achse.

  Die *y*-Achse bekommt die Bezeichnung imaginäre Achse und fertig ist die Gauß'sche Zahlenebene:



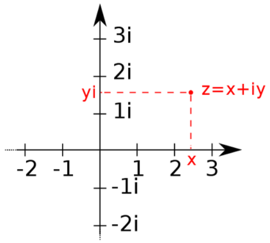
Definition von $\mathbb{C}$

Nun können wir die komplexen Zahlen wie folgt definieren:

Definition (Komplexe Zahlen)

$$\mathbb{C} := \left\{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}.$$

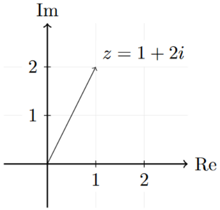
$\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$ heißt Realteil, $\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$.



Darstellung von $\mathbb{C}$

Algebraische Darstellung & Vektordarstellung

Die Darstellung von $z \in \mathbb{C}$ als $z = x + iy$ wird als algebraische Darstellung (auch kartesische Darstellung oder arithmetische Form) bezeichnet. Alternativ kann man komplexe Zahlen auch als 2-dimensionale Vektoren $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ verstehen:

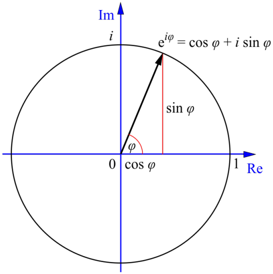


Der Nachteil dieser Darstellung ist, dass wir mit Vektoren anders rechnen als mit komplexen Zahlen: Komplexe Zahlen kann man multiplizieren, mit Vektoren ist das nicht ohne Weiteres möglich.

Darstellung von $\mathbb{C}$

Trigonometrische Darstellung

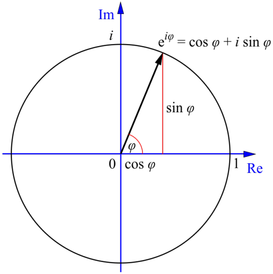
Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung von **Polarkoordinaten**:



Im Einheitskreis (Radius $r = 1$) ist $\cos\varphi$ gerade der Realteil und $\sin\varphi$ der Imaginärteil der komplexen Zahl $z := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Hierbei legen wir fest: $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Darstellung von $\mathbb{C}$

Trigonometrische Darstellung



Aufgrund der *Eulerschen Identität* (Definition der komplexen Exponentialfunktion) gilt

$$z = a + ib = \cos\varphi + i\sin\varphi = \mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Und allgemein (für komplexe Zahlen außerhalb des Einheitskreises):

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Addition und Multiplikation

Definition (Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$)

Es seien $z_1 := x_1 + iy_1$ und $z_2 := x_2 + iy_2$ komplexe Zahlen. Dann gilt:

1. Addition:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
2. Multiplikation:
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

- Beim Addieren zweier komplexer Zahlen werden also jeweils Real- und Imaginärteile addiert.
- Das Produkt zweier komplexer Zahlen berechnet man ganz „normal“ durch Ausmultiplizieren wie in $\mathbb{R}$ unter Berücksichtigung der Eigenschaft $i^2 = -1$.
- Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ sind kommutativ, assoziativ und es gilt das Distributivgesetz.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Addition und Multiplikation

Aufgabe 1 (Rechnen auf $\mathbb{C}$)

Es seien die beiden komplexen Zahlen $z_1 := 2 - 3i$ und $z_2 := 1 + 4i$ gegeben. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_1 \cdot z_2$.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Addition und Multiplikation

Aufgabe 1 (Rechnen auf $\mathbb{C}$) – Lösung

Es seien die beiden komplexen Zahlen $z_1 := 2 - 3i$ und $z_2 := 1 + 4i$ gegeben. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_1 \cdot z_2$.

Lösung

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (2 - 3i) + (1 + 4i) = (2 + 1) + (-3i + 4i) = 3 + i, \\
z_1 - z_2 &= (2 - 3i) - (1 + 4i) = (2 - 1) + (-3i - 4i) = 1 - 7i, \\
z_1 \cdot z_2 &= (2 - 3i) \cdot (1 + 4i) = 2 \cdot (1 + 4i) - 3i \cdot (1 + 4i) \\
&= 2 + 8i - 3i - 3 \cdot 4 \cdot i^2 \\
&= 2 + 5i + 12 = 14 + 5i.
\end{aligned}$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

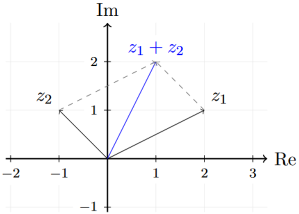
Addition und Multiplikation

Aufgabe 2 (Rechnen auf $\mathbb{C}$)

Es seien die beiden komplexen Zahlen $z_1 := 5 + 7i$ und $z_2 := -1 - 3i$ gegeben. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_1 \cdot z_2$.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Veranschaulichung der Addition



Die Addition zweier komplexer Zahlen ist vergleichbar mit der Addition zweier Vektoren.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Betrag & Konjugation

Da wir die komplexen Zahlen in einer euklidischen Ebene veranschaulichen können, liegt es nahe, auch einen Betrag auf $\mathbb{C}$ zu definieren. Dabei kommt uns wieder Pythagoras zur Hilfe:

Definition (Betrag)

Der Betrag einer komplexen Zahl $z := x + iy$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

In der trigonometrischen Darstellung ist $|z|$ nichts anderes als der Radius r von z.

Definition (Konjugation)

Die komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ zu einer komplexen Zahl $z := x + iy$ ist definiert als

$$\overline{z} := x - iy.$$

Die Konjugation $\overline{z}$ entspricht also einer Spiegelung von z an der reellen Achse.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Zusammenhang von Betrag und Konjugation

Multipliziert man $z \in \mathbb{C}$ mit der Konjugierten $\overline{z}$, so erhält man:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Damit lässt sicher der Betrag alternativ definieren als:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Betrag

Aufgabe

Es seien die komplexen Zahlen $z_1 := 3 + 4i$, $z_2 := 1 + 2i$ und $z_3 := 1 + \sqrt{2}i$ gegeben. Berechnen Sie:

(a) $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3,$

(b) $z_1 \cdot \overline{z}_1, z_2 \cdot \overline{z}_2, z_3 \cdot \overline{z}_3,$

(c) $|z_1|, |z_2|, |z_3|,$

(d) $z_1^2, z_2^3, z_3^4, i^{10}.$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Betrag

Aufgabe – Einige Lösungen

Es seien die komplexen Zahlen $z_1 := 3 + 4i$, $z_2 := 1 + 2i$ und $z_3 := 1 + \sqrt{2}i$ gegeben. Berechnen Sie:

(a) $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3,$

(b) $z_1 \cdot \overline{z}_1, z_2 \cdot \overline{z}_2, z_3 \cdot \overline{z}_3,$

(c) $|z_1|, |z_2|, |z_3|,$

(d) $z_1^2, z_2^3, z_3^4, i^{10}.$

Einige Lösungen

$$\overline{z}_1 = 3 - 4i, \quad z_2 \cdot \overline{z}_2 = 5, \quad |z_2| = \sqrt{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Multiplikative Inverse

Damit die Zahlenerweiterung von $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ sinnvoll ist, sollte es auch eine Inverse zur Multiplikation zweier komplexer Zahlen geben. Mit anderen Worten:

$$\text{Gesucht ist } z^{-1} \text{ mit } z^{-1}z = zz^{-1} = 1.$$

Herleitung:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Die Inverse ist damit gefunden und zugleich wurde ein Kochrezept zum Dividieren durch komplexe Zahlen angelegt – Erweitern des Bruches mit der Konjugierten.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Betrag

Aufgabe (Inverse)

Es seien wieder die komplexen Zahlen $z_1 := 3 + 4i$, $z_2 := 1 + 2i$ und $z_3 := 1 + \sqrt{2}i$ gegeben. Berechnen Sie:

$$z_1^{-1},\ z_2^{-1},\ z_3^{-1},\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_2}{z_1}.$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Betrag

Aufgabe (Inverse) – Einige Lösungen

Es seien wieder die komplexen Zahlen $z_1 := 3 + 4i$, $z_2 := 1 + 2i$ und $z_3 := 1 + \sqrt{2}i$ gegeben. Berechnen Sie:

$$z_1^{-1},\ z_2^{-1},\ z_3^{-1},\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_2}{z_1}.$$

Einige Lösungen

$$z_2^{-1} = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{1-2i}{5}. \quad \left[\text{Kontrolle: } z_2 \cdot z_2^{-1} = \frac{(1+2i)(1-2i)}{5} = \frac{5}{5} = 1.\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} == \frac{(3+4i)\cdot(1-2i)}{5} = \frac{3-6i+4i+8}{5} = \frac{11-2i}{5}.$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Zusammenfassung: Umrechnung zwischen den Darstellungsvarianten

Algebraische Darstellung	vs.	**Trigonometrische/exp. Darstellung**
$z = x + iy$ mit $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$		$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = re^{i\varphi}$ mit $r = \lvert z \rvert$ und $\varphi = \arg(z)$
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$	$\Leftarrow$	$r,\ \varphi$
$x,\ y$	$\Rightarrow$	$r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{für } y \geqslant 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{für } y < 0. \end{cases}$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Umrechnung zwischen den Darstellungsvarianten

Aufgabe (Umrechnung)

Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen in die trigonometrische (und exponentielle) Darstellung um:

$$\text{(a)} \quad z_1 = 1 + i, \quad \text{(b)} \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad \text{(c)} \quad z_3 = 1 - i.$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Umrechnung zwischen den Darstellungsvarianten

Aufgabe (Umrechnung) – Lösung

Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen in die trigonometrische (und exponentielle) Darstellung um:

$$\text{(a)}\quad z_1 = 1 + i, \quad \text{(b)}\quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad \text{(c)}\quad z_3 = 1 - i.$$

Lösung von (a)

$$\begin{aligned} z_1 = 1 + i \Rightarrow\ & r = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \\ \Rightarrow\ & \varphi = \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z_1)}{r}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \\ \Rightarrow\ & z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \left(= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right). \end{aligned}$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

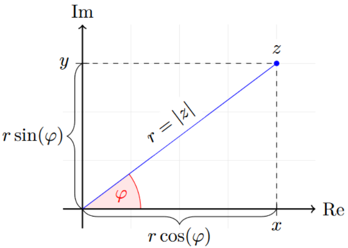
Potenzieren komplexer Zahlen

Es sei folgende komplexe Zahl gegeben: $z := 1 + i$. Wie groß ist denn z^{10}?

Was genau ist passiert überhaupt beim Potenzieren einer komplexen Zahl? Kann man das veranschaulichen?

Für das Potenzieren komplexer Zahlen bietet es sich an, die trigonometrische Darstellung zu nutzen:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

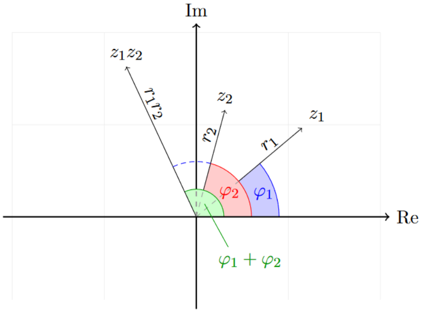


Rechnen auf $\mathbb{C}$

Potenzieren komplexer Zahlen

Wie ist es denn um die Multiplikation in trigonometrischer Darstellung bestellt?

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\right] \\ &= r_1 r_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1+\varphi_2))\,. \quad \textcolor{red}{\text{(Additionstheoreme!)}} \end{aligned}$$



Rechnen auf $\mathbb{C}$

Potenzieren komplexer Zahlen

Aus der obigen Herleitung folgt ganz allgemein der

Satz von Moivre

Für $z := r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n\,(cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))\,.$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Potenzieren komplexer Zahlen

Nun können wir die Eingangsfrage bequem durch Einsetzen in die Formel von Moivre lösen. Wir benutzen dafür die Lösung aus der Aufgabe zur Umwandlung von $z = 1 + i$ in trigonometrische Form:

$$\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^{10} \\
&= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}\left[\cos\left(10 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(10 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= 2^5 \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right] \\
&= 32 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad \text{(Periodizität!)} \\
&= 32 \cdot [0 + i \cdot 1] \\
&= 32i.
\end{aligned}$$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Potenzieren komplexer Zahlen

Aufgabe (Potenzieren)

Berechnen Sie $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{10}$.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Übersicht: Rechnen mit verschiedenen Darstellungen

Algebr. Darst.	**Trigonometrische Darst.**	**Exponentielle Darst.**
$z = x + iy$	$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$	$z = re^{i\varphi}$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren	$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$	$z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$

Rechnen auf $\mathbb{C}$

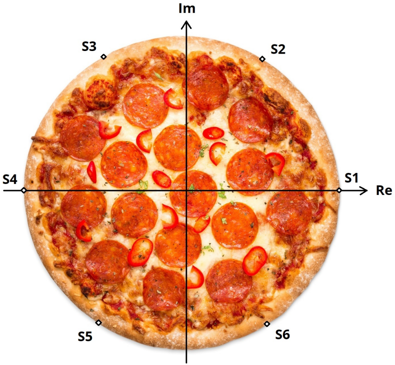
Wurzelziehen

Aufgabe (Komplexe Pizza)

Don Fabio ist ein exzellenter Pizzabäcker, der die Kunst des Backens von Nonna Stella gelernt hat – so, wie es in Don Fabios Familie Neromonte seit Anbeginn der Zeit Brauch ist. Heute möchte er seinem Sohn Marco Piccolo zeigen, wie man eine fertige Pizza richtig teilt. Marco Piccolo weiß bereits, dass dabei ein von der Familie Neromonte streng gehütetes Geheimverfahren mit dem Namen „Equazione della Divisione della Circonferenza“ aus der uralten Sammlung „Numeri Complessi“ zur Anwendung kommt. Dieses Verfahren beschreibt, wie eine fertige kreisrunde Pizza mit exakt drei geraden Schnitten durch den Pizzamittelpunkt in sechs gleichgroße Stücke geteilt wird.

Mit dem ersten derartigen Schnitt wird die Pizza zunächst halbiert. Danach wird mit Hilfe der „Equazione della Divisione della Circonferenza“ exakt berechnet, durch welche Punkte auf dem Rand der Pizza die beiden weiteren Schnitte verlaufen müssen.

Helfen Sie bitte Marco Piccolo, indem Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte ausrechnen. Selbstverständlich unter der vereinfachenden Annahme, dass die Pizza einen Durchmesser von 2 Längeneinheiten hat. Legen Sie dazu die Pizza so in die Gauß'sche Zahlenebene, dass der Pizzamittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und der erste Schnitt zur Halbierung der Pizza entlang der reellen Achse verläuft.



Schnittpunkt	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Betrag Argument						
Realteil Imaginärteil						

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Wurzelziehen

- Was genau hat das Pizzabeispiel nun mit **Wurzelziehen** zu tun?
- Im Prinzip haben wir hier die Gleichung

$$z^6 = 1$$

  nach z aufgelöst. Ähnlich wie im Reellen, bekommen wir nicht nur die Lösung $z = \sqrt[6]{1} = 1$, sondern alle komplexen Zahlen z_k, deren Real- und Imaginärteil durch die Schnittpunktkoordinaten von S_k gegeben sind (die sogenannten **Einheitswurzeln**) erfüllen diese Gleichung (verwenden Sie einfach den Satz von Moivre, um das zu überprüfen).
- Entsprechend würde man also beim Ziehen der 7. Wurzel den Kreis in sieben gleiche Teile teilen, beim Ziehen der n-ten Wurzel in n Teile.
- Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Zahl 1: Das entspricht im Pizzabeispiel der Annahme, dass der Pizzadurchmesser 2 LE, der Pizzaradius also 1 LE beträgt.
- Für eine allgemeine rechte Seite $b \in \mathbb{C}$ sieht das Ergebnis natürlich ein wenig anders aus.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Wurzelziehen

Wir betrachten die Gleichung

$$\boxed{z^n = b}$$

wobei $b \in \mathbb{C}$ bekannt sei und alle $z \in \mathbb{C}$, die diese Gleichung erfüllen, gesucht seien.

- Analog zum Satz von Moivre, wo bei der Berechnung der n-ten Potenz mit r^n gerechnet werden muss, kommt beim Wurzelziehen der Faktor $\sqrt[n]{|b|}$ ins Spiel.
- Die resultierenden Winkel der Lösungen erhält man, indem man $\beta = \arg(b)$ betrachtet und ausgehend von diesem Winkel in Abhängigkeit von n „weiterdreht" – so lange, bis wieder die erste Lösung der Gleichung erreicht wird und das Spiel von vorne beginnen würde.
- In einem Satz verpackt sieht das so aus:

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Wurzelziehen – Kreisteilungsgleichung

Satz (Kreisteilungsgleichung)

Es seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $\beta = \arg(b)$ gegeben. Dann besitzt die Gleichung

$$z^n = b$$

genau n Lösungen. Diese berechnen sich zu

$$z_k = \sqrt[n]{|b|} \cdot \exp\left(i \cdot \frac{\beta + k \cdot 2\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

- Die Lösungen der Gleichung $z^n = b$ liegen also auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt[n]{|b|}$ und „teilen“ diesen in n gleich große Teile.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Wurzelziehen – Kreisteilungsgleichung – Aufgaben

Aufgabe (Kreisteilungsgleichung 1)

(a) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ und skizzieren Sie die Ergebnisse in der Gauß'schen Zahlenebene.

(b) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn stattdessen die Gleichung $z^3 = 8$ gelöst werden soll?

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Wurzelziehen – Kreisteilungsgleichung – Aufgaben

Aufgabe (Kreisteilungsgleichung 2)

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^5 = i$.

Rechnen auf $\mathbb{C}$

Wurzelziehen – Kreisteilungsgleichung

Ein kleines Online-Tool zum Spielen mit der Kreisteilungsgleichung finden Sie hier:

https://www.geogebra.org/m/B4QXUQq3

Anwendung: Drehungen

Einleitung

- Wir haben im letzten Semester gelernt, dass man die Drehung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel φ durch die Multiplikation mit einer Matrix wie folgt beschreiben kann:

$$v' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} v.$$

- Alternativ besteht die Möglichkeit des Übergangs zu homogenen Koordinaten.
- Der $\mathbb{R}^2$ und die Gauß´sche Zahlenebene sind sich so ähnlich, dass wir sie miteinander *identifizieren* können. D.h. ein Vektor $v = (v_1, v_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ entspricht der komplexen Zahl $v_1 + i \cdot v_2 \in \mathbb{C}$.
- Wie lässt sich dann eine Drehung des Vektors $(v_1, v_2)^\top$ in der komplexen Ebene beschreiben? Möglicherweise sogar ohne Matrizen?

Anwendung: Drehungen

Video

- Sehen Sie sich das folgende Video von Jörn Loviscach über Drehungen im $\mathbb{R}^2$ und die Euler´sche Identität an:

  `https://www.youtube.com/watch?v=GMTRgdLodNQ`

- Im Anschluss beantworten Sie bitte die Fragen auf den nächsten Folien.

Anwendung: Drehungen

Fragen zum Video von Jörn Loviscach I

1. Was versteht man unter dem „Winkel einer komplexen Zahl“?

2. Was passiert mit den Winkeln φ_1 und φ_2 zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2, wenn man die beiden Zahlen miteinander multipliziert?

3. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $z = a + bi$ mit i entspricht einer Drehung von z um den Ursprung um wieviel Grad?

Anwendung: Drehungen

Fragen zum Video von Jörn Loviscach II

4. Wie lautet das Ergebnis der Rechnung $z \cdot i$ für $z = a + bi$?

5. Eine Drehung von $z \in \mathbb{C}$ um den Ursprung entspricht also einer Multiplikation von z mit einer weiteren komplexen Zahl, die wir hier R_φ nennen wollen. Wie groß muss der Betrag von R_φ sein?

6. Wie groß ist φ bei der Multiplikation von z mit $R_\varphi = i$?

Anwendung: Drehungen

Fragen zum Video von Jörn Loviscach III

7. Wie lautet allgemein die Darstellung von R_φ in trigonometrischer Form? Und wie in der exponentiellen Form?

Anwendung: Drehungen

Fragen zum Video von Jörn Loviscach – Zusammenfassung

8. Zusammenfassung: Wie berechnet man allgemein z' als Ergebnis einer Drehung von $z \in \mathbb{C}$ um den Winkel φ um den Ursprung der Gauß'schen Zahlenebene?

   $z' =$

9. Wie lautet das Ergebnis konkret für $z = x + iy$?

   $z' = x' + iy' =$

Anwendung: Drehungen

Aufgabe

Aufgabe (Drehungen in $\mathbb{C}$)

Berechnen Sie:

(a) Das Ergebnis einer Drehung von $z_a = 2 + i$ um $180°$ um den Ursprung.

(b) Das Ergebnis einer Drehung von $z_b = -1 - i$ um $\frac{3}{2}\pi$ um den Ursprung.

(c) Das Ergebnis einer Punktspiegelung von $z_c = -1 + 2i$ am Ursprung.

(d) Welche Drehung entspricht der Konjugation von $z_d = 1 + i$?

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Komplexe Zahlen)

1. Sie definieren die **komplexen Zahlen** als Erweiterung des reellen Zahlenstrahls um eine imaginäre Achse.
2. Sie stellen eine komplexe Zahl in drei verschiedenen **Varianten** dar.
3. Sie führen elementare **Rechenoperationen** auf $\mathbb{C}$ durch, Sie berechnen den **Betrag** einer komplexen Zahl und deren **Konjugierte**.
4. Mit der Formel von Moivre berechnen Sie beliebige **Potenzen** einer komplexen Zahl, mit der **Kreisteilungsgleichung** ziehen Sie Wurzeln.
5. Sie führen eine **Drehung** eines Punktes in der Gauß'schen Zahlenebene gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung durch die Multiplikation mit einer geeigneten komplexen Zahl durch.

Inhalt

von Kapitel 4: Zahlbereichserweiterungen

Quaternionen

Einführung und Konstruktion

- Quaternionen wurden 1843 von Sir William Rowan Hamilton bei der Suche nach einer dreidimensionalen Erweiterung der komplexen Zahlen erfunden.
- Quaternionen bestehen aus einem skalaren (s) und einem vektoriellen (x, y, z) Anteil.
- Es sind folgende Schreibweisen üblich:

$$q = s + ix + jy + kz \quad \text{oder} \quad q = \left[s, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right].$$

- Die Menge aller Quaternionen wird mit $\mathbb{H}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

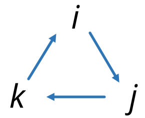
Quaternionen

Rechenregeln

Definition (Rechenregeln für Quaternionen)

1. Für die imaginären Einheiten i, j, k gelten die folgenden Rechenregeln:
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$
Da die Multiplikation von Quaternionen nicht kommutativ ist, gilt:
$$i \cdot j = k,\; j \cdot k = i,\; k \cdot i = j,$$
$$j \cdot i = -k, k \cdot j = -i\;,\; i \cdot k = -j.$$

Merkhilfe: In Pfeilrichtung ist das Vorzeichen der Imaginärteilmultiplikation positiv, in entgegengesetzter Richtung ist es negativ.



Quaternionen

Rechenregeln

Definition (Rechenregeln für Quaternionen) – *Fortsetzung*

Es seien nun zwei Quaternionen $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ gegeben mit

$$q_m := s_m + ix_m + jy_m + kz_m, \quad m \in \{1, 2\}.$$

2. Die Summe von q_1 und q_2 ist definiert als

$$q_1 + q_2 := (s_1 + s_2) + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2).$$

(Komponentenweises Addieren)

3. Das Produkt von q_1 und q_2 ist definiert als

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 := {} & (s_1 s_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + i(s_1 x_2 + s_2 x_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ & + j(s_1 y_2 + s_2 y_1 + x_2 z_1 - x_1 z_2) + k(s_1 z_2 + s_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

(Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung der obigen Rechenregeln)

Bemerkung: Für $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$ ergeben sich die Rechenregeln in $\mathbb{C}$.

Quaternionen

Rechenregeln – Aufgabe 1

Aufgabe 1 (Rechnen mit Quaternionen)

Es seien die Quaternionen

$$q_1 := 3 + i + j + k \quad \text{und} \quad q_2 := 2 - i$$

gegeben. Wie lauten die Ergebnisse von

$$\text{(a)} \quad q_1 + q_2, \qquad \text{(b)} \quad q_1 \cdot q_2?$$

Bitte lösen Sie diese Aufgabe unter Verwendung der obigen Definitionen.

Quaternionen

Rechenregeln

- Da die Multiplikation von Quaternionen nicht kommutativ ist, bildet das Tripel $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ mit den oben definierten Rechenregeln einen *Schiefkörper*.
- Folgende weitere Begriffe werden für ein Quaternion $q = s + ix + jy + kz$ definiert:
  - Realteil von q:
    $$\mathrm{Re}(q) := s.$$
  - Imaginärteil von q:
    $$\mathrm{Im}(q) := ix + jy + kz.$$
    Damit ergibt sich: $q = \mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q)$.
  - Konjugiertes Quaternion zu q:
    $$\overline{q} := \mathrm{Re}(q) - \mathrm{Im}(q) = s - ix - jy - kz.$$

Quaternionen

Wiederholung – Vektorprodukte

Erinnerungen

Es seien die reellen Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

- Das *Skalarprodukt* von v und w ist definiert als

$$v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \in \mathbb{R}.$$

- Das *Kreuzprodukt* von v und w ist definiert als

$$v \times w := \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Quaternionen

Rechenregeln in Vektorschreibweise

- Für die Vektorschreibweise von zwei Quaternionen in der Form

  $$q_1 := [s_1, v_1] \text{ und } q_2 := [s_2, v_2] \text{ mit } v_m := \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix},\ m \in \{1, 2\},$$

  ergeben sich damit folgende Rechenregeln:

  $$q_1 + q_2 = [s_1 + s_2, v_1 + v_2]$$

  $$q_1 \cdot q_2 = [s_1 \cdot s_2 - v_1 \bullet v_2 \ ,\ v_1 \times v_2 + s_1 \cdot v_2 + s_2 \cdot v_1]$$

- Diese Rechenregeln entsprechen der Definition von oben. Es steht Ihnen völlig frei, welche Darstellung Sie beim Rechnen mit Quaternionen verwenden wollen.

Quaternionen

Rechenregeln – Norm und Betrag

- Konjugiertes Quaternion zu $q = [s, v]$ in Vektorschreibweise:

$$\overline{q} = [s, -v].$$

- Der Betrag (bzw. die Länge) eines Quaternions ist

$$\|q\| := \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

  q heißt Einheitsquaternion, falls gilt: $\|q\| = 1$.

- Das inverse Quaternion zu q ist

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}.$$

Quaternionen

Rechenregeln – Aufgabe 2

Aufgabe 2 (Rechnen mit Quaternionen)

Gegeben seien die folgenden Quaternionen:

$$q_1 = 1 + i, \quad q_2 = 1 + j, \quad q_3 = \left[-1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right].$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $q_1 + q_2 + q_3$,
(b) $q_1 \cdot q_2$,
(c) $q_2 \cdot q_1$,
(d) $q_2 \cdot \overline{q}_3$,
(e) $q_3 \cdot \overline{q}_1$,
(f) $\|q_2\|$,
(g) q_1^{-1},
(h) $q_1 \cdot q_3^{-1}$,
(i) $\|q_1\| \cdot \|q_3^{-1}\|$.

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

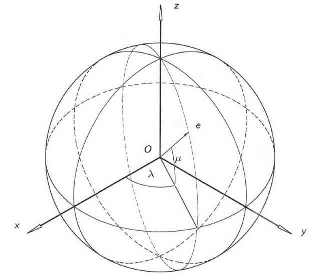
Einführung

- Quaternionen werden in der Softwareentwicklung genutzt, um Drehungen im Raum bspw. bei 3D-Computerspielen zu beschreiben.
- Wir wollen hier kurz beschreiben, wie man einen Punkt $P(x, y, z)$ des $\mathbb{R}^3$ um eine beliebige Achse durch den Ursprung $O(0, 0, 0)$ dreht.

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Geographische Koordinaten

- Um Drehungen im $\mathbb{R}^3$ zu beschreiben, bietet es sich an, geographische Koordinaten zu nutzen.
- Geographische Koordinaten sind eine Art von *Kugelkoordinaten*, die man z.B. von den Geokoordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche kennt.
- Einem Vektor $e = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ werden die Winkel $\lambda \in [0; 2\pi)$ (beschreibt die Lage in der xy-Ebene) und $\mu \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (beschreibt die "Höhe" über der xy-Ebene) zugeordnet – siehe Abbildung.



Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Geographische Koordinaten

- Bei den Geokoordinaten auf der Erdoberfläche entspricht λ gerade dem Längengrad und μ dem Breitengrad eines Punktes.
- Die Drehachse durch den Ursprung, deren Lage durch den Vektor $e = (b, c, d)^\top$ beschrieben wird, kann dann in geografischen Koordinaten wie folgt berechnet werden:

$$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda \cdot \cos\mu \\ \sin\lambda \cdot \cos\mu \\ \sin\mu \end{pmatrix}.$$

Wichtig: Hierbei gelte $\|e\| = 1$, d.h. $b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Schrittweise Anleitung

Folgende Schritte werden nun durchgeführt, um eine Drehung eines Punktes P um die Achse $e \in \mathbb{R}^3$ durch den Ursprung zu beschreiben:

1. Schreibe den Punkt $P(x, y, z)$ als Quaternion:

$$P(x, y, z) \quad \mapsto \quad q := ix + jy + kz \quad \text{(Realteil } s = 0\text{)}.$$

2. Bestimme den Richtungsvektor e der Drehachse aus den geographischen Koordinaten (λ, μ):

$$e = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda \cdot \cos\mu \\ \sin\lambda \cdot \cos\mu \\ \sin\mu \end{pmatrix}.$$

Ist der Richtungsvektor e bereits bekannt, so muss er lediglich auf die Länge 1 normalisiert werden durch $e \mapsto \frac{1}{\|e\|} e$.

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Schrittweise Anleitung – Fortsetzung

3. Drehung von P um e um den Winkel $\varphi \in [0; 2\pi)$:
   Für das Bild P' von P gilt dann:

$$P'(x', y'z') \quad \mapsto \quad q' = ix' + jy' + kz' \quad \text{mit}$$

$$q' = q_\varphi \cdot q \cdot \overline{q}_\varphi, \quad q_\varphi := \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot (ib + jc + kd)\,.$$

   $\overline{q}_\varphi$ bezeichnet das konjugierte Quaternion zu q_φ.

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (Drehung im $\mathbb{R}^3$)

Wie lauten die Koordinaten eines Punktes $P(x, y, z)$ nach Drehung um $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ($\hat{=}$ 60°) um die x-Achse?

Lösung

1. Schreibe P als Quaternion q: $q := ix + jy + kz$.
2. Richtungsvektor der x-Achse: $e = (1, 0, 0)^\top$. Es gilt $\|e\| = 1$.

   Alternativ:
   Die geogr. Koordinaten der x-Achse lauten: $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

$$\Longrightarrow \; e = \begin{pmatrix} \cos(0) \cdot \cos(0) \\ \sin(0) \cdot \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1 – Fortsetzung

3. Bestimme q_φ:

$$\begin{aligned} q_\varphi &:= \cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) \cdot (ib + jc + kd) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \cdot i \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} i, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \overline{q}_\varphi = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} i.$$

Für q' ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} q' &= q_\varphi \cdot q \cdot \overline{q}_\varphi \\ &= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} i\right) \cdot (ix + jy + kz) \cdot \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) \\ &= \left[-\tfrac{x}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + j\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y - \tfrac{z}{2}\right) + k\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z + \tfrac{y}{2}\right)\right] \cdot \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) \end{aligned}$$

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1 – Fortsetzung

$$\begin{aligned} q' &= \left[-\tfrac{x}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + j\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y - \tfrac{z}{2}\right) + k\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z + \tfrac{y}{2}\right)\right] \cdot \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i\right) \quad \textit{(Übertrag)} \\ &= -\tfrac{\sqrt{3}}{4}x + i\tfrac{3}{4}x + j\left(\tfrac{3}{4}y - \tfrac{\sqrt{3}}{4}z\right) + k\left(\tfrac{3}{4}z + \tfrac{\sqrt{3}}{4}y\right) \\ &\quad + i\tfrac{1}{4}x + \tfrac{\sqrt{3}}{4}x + k\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}y - \tfrac{1}{4}z\right) - j\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}z + \tfrac{1}{4}y\right) \\ &= ix + j\left(\tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right) + k\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{1}{2}z\right). \end{aligned}$$

Nach der Drehung von $P(x, y, z)$ um 60° um die x-Achse im $\mathbb{R}^3$ entsteht also der Punkt $P'(x', y', z')$ mit:

$$\boxed{P'(x', y', z') = P'\left(x, \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}z, \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{1}{2}z\right)}$$

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (Drehung im $\mathbb{R}^3$)

Der Punkt $P(0, 2, 6)$ soll um 60° um die z-Achse gedreht werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes P'.

Lösung

1. P als Quaternion: $P \mapsto q := \ldots$
2. Richtungsvektor der Drehachse: $e := \ldots$
3. Berechnung der Koordinaten von P':

$$q_\varphi := \ldots \quad \Longrightarrow \quad q' = q_\varphi \cdot q \cdot \overline{q}_\varphi = \ldots$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P'(\sqrt{3}, 1, 6)}$$

Anwendung von Quaternionen: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Hinweis

- Als Kontrollrechnung empfiehlt es sich zu prüfen, ob die Länge des Ortsvektors des Bildpunktes P' der Länge des Ortsvektors von P entspricht.

  In Aufgabe 2 bspw.:

$$\|(0,2,6)^\top\| = \sqrt{0^2+2^2+6^2} = \sqrt{40} = \|(\sqrt{3},1,6)^\top\|.$$

- Unter dem folgenden Link gelangen Sie zu einem Tool, in dem eine Drehung durch Quaternionen visualisiert wird:

  `https://eater.net/quaternions/video/intro`

  Dort können Sie auch selbst konkrete Werte für Real- und Imaginärteil der Quaternionen eingeben und deren Auswirkungen auf das Drehergebnis untersuchen.

  Tipp: Mit einem Klick auf **2D** unten in der Mitte können Sie sich auch die Drehung in der Gauß'schen Zahlenebene ansehen, die wir im vergangenen Abschnitt kennengelernt hatten.

Versuchen Sie bitte, die folgenden Lernaktivitäten für sich zu reflektieren. Sind Sie dazu in der Lage, diese Dinge selbstständig auszuführen?

Selbstreflexion (Quaternionen)

1. Sie definieren die Menge der **Quaternionen** als Erweiterung der komplexen Zahlen.
2. Sie berechnen **Real**- und **Imaginärteil** von Quaternionen, sowie das **konjugierte** Quaternion.
3. Sie **addieren** und **multiplizieren** Quaternionen und berechnen deren **Norm**.
4. Mit Hilfe von Quaternionen berechen Sie das Ergebnis der **Drehung** eines Punktes im dreidimensionalen Raum um eine Achse durch den Koordinatenursprung.