Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Frank Henschel, Michael Meinhold

Dresden, 18. Dezember 2022

Mathematik 1 - WS2022/23
Übungsblatt 12

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ jeweils die erste Ableitung auf ihrem größtmöglichen Definitionsbereich $D' \subseteq D$.

(a) $f(x) = \sqrt{x^4\sqrt{x^3}}$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x^4}$ (c) $f(x) = \sqrt{4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2}$

(d) $f(x) = (x + \frac{1}{2}) \cdot \ln(2x + 1)$ (e) $f(x) = \frac{3}{\sin^2(x)} - \frac{5}{\sin(x)}$ (f) $f(x) = x^x$

(g) $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ (h) $f(x) = \ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit größtmöglichem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ an der Stelle $x = 2$ stetig und differenzierbar ist.

(a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4 & \text{falls } x \le 2 \\ (a+b)x + b & \text{falls } x > 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} - b & \text{falls } x \le 2 \\ a\sin(\pi/x) + \sqrt{2} \cdot x & \text{falls } x > 2 \end{cases}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die erste Ableitung der gegebenen Funktionen

$$f_i : D \to \mathbb{R}^n, \quad (i \in \{1, 2, 3\},\ n \in \{2, 3\})$$

auf ihrem jeweils größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

$$\text{(a)} \quad f_1(x) = \begin{pmatrix} x^2 + \ln(-x) \\ \sinh(x) \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \cosh(x) \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad f_3(x) = \begin{pmatrix} 2^x \\ \frac{x^2 - \ln(x)}{\mathrm{e}^{2x}} \\ \arctan(x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie für die folgenden Funktionen

$$f : (x; y) \mapsto z = f(x; y) \quad \text{mit} \quad (x; y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

die ersten partiellen Ableitungen:

(a) $f(x; y) = x^2y^3 + x^3y + xy + \sqrt{y}$, (b) $f(x; y) = \dfrac{x+y}{x-y}$,

(c) $f(x; y) = \mathrm{e}^{-x/y}$, (d) $f(x; y) = \ln(x^2 + y)$.

Aufgabe 5: Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x\mathrm{e}^x$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen f', f'' und f''' von f mit größtmöglichen Definitionsbereichen

$$D''' \subseteq D'' \subseteq D' \subseteq D$$

(b) Stellen Sie eine Vermutung für $f^{(n)}$ auf und beweisen sie diese mittels vollständiger Induktion.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie jeweils alle Punkte des Funktionsgraphen G_f zur Funktion f, die eine zur x-Achse parallele Tangente besitzen.

(a) $f : x \mapsto y = 5 \cdot e^{-x^2}$

(b) $f : x \mapsto y = 3(x-2)^2(x-1)$

(c) $f : x \mapsto y = \sin x \cdot \cos x$

(d) $f : x \mapsto y = 4x^3 - 6x^2 - 9x$

(e) $f : t \mapsto y = (2-t) \cdot e^{-5t}$

Als Definitionsbereich wird jeweils $D = \mathbb{R}$ festgelegt.

Aufgabe 7: Welche Geradengleichung beschreibt die Tangente an die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x^2 + 5x)$ im Punkt $P(1, f(1))$?

Aufgabe 8:

(a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte des Funktionsgraphen zu $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$, in denen die Tangenten parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x - 2$ verlaufen.

(b) Berechnen Sie den spitzen Winkel, unter welchem sich die Funktionsgraphen zu den Funktionen $f : x \mapsto y = \sin x$ und $h : x \mapsto y = \cos x$ mit $x \in \mathbb{R}$ schneiden.

Aufgabe 9: Weisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen nach.

(a) Die erste Ableitung einer geraden differenzierbaren Funktion ist eine ungerade Funktion.

(b) Die erste Ableitung einer ungeraden differenzierbaren Funktion ist eine gerade Funktion.

Hinweis: Wenden Sie die Ableitungsregeln an.