TU Bergakademie Freiberg
Dr. M. Winkler

Freiberg, 3. Februar 2025
Abgabe am 14. Februar 2025

Optimierung für Mathematiker/innen

Übung 14

Aufgabe 57: Umformulierung von Ungleichungsnebenbedingungen mit Hilfe von Slacks

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{1}$$

und das dazu äquivalente Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } (x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ \text{und} \quad & s \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Gib die KKT-Bedingungen für beide Probleme an und zeige, dass sie zueinander äquivalent sind.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(x) \le 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und $s_i = -g_i(x)$ für $i = 1, \ldots, m$. Zeige, dass für Problem (1) die Abadie-CQ im Punkt x genau dann erfüllt ist, wenn sie für das Problem (2) im Punkt (x, s) erfüllt ist.

Aufgabe 58: Umformulierung von Ungleichungsnebenbedingungen mit Hilfe von Slacks erhält MFCQ und LICQ

Wir betrachten die in Aufgabe 57 gegebenen Probleme. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(x) \le 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und $s_i = -g_i(x)$ für $i = 1, \ldots, m$. Zeige, dass für Problem (1) MFCQ bzw. LICQ im Punkt x genau dann erfüllt ist, wenn MFCQ bzw. LICQ für das Problem (2) im Punkt (x, s) erfüllt ist.

Aufgabe 59: Lagrange-Multiplikatoren für Minimax–Aufgabe

Wir betrachten das Problem:

$$\text{Minimiere} \quad \max\{f_1(x), \ldots, f_r(x)\} \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, r$.

Es sei x^* ein lokales Minimum. Zeige zunächst über die MFCQ (Satz 17.9), dass Lagrange-Multiplikatoren μ_j^*, $j = 1, \ldots, r$ existieren, so dass (x^*, μ^*) das zugehörige KKT-System erfüllen. Folgere daraus die notwendigen Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla f_j(x^*) = 0, \qquad \mu^* \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* = 1$$

$$\text{und} \quad \mu_j^* = 0, \quad \text{für } j \text{ mit } f_j(x^*) < \max\{f_1(x^*), \ldots, f_r(x^*)\}.$$

Hinweis: Betrachte das äquivalente Problem (die sogenannte Epigraph-Formulierung):

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & t & & \text{über } (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{sodass} \quad & f_j(x) \leq t, & & j = 1, \ldots, r. \end{aligned}$$

Aufgabe 60: $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0) = \mathcal{T}_{X_{\text{lin}}(x_0)}(x_0)$

Beweise Bemerkung 16.3 (a). Folgere daraus, dass für lineare Programme

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ die Abadie-CQ (d.h. $\mathcal{T}_X(x_0) = \mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$) in jedem zulässigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Hausaufgabe 32: KKT-Bedingungen für quadratische Optimierungsprobleme

Wir betrachten die folgende quadratische Optimierungsaufgabe mit linearen Gleichungsnebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & B\,x = d. \end{aligned}$$

Dabei sei $Q^\top = Q \succ 0$, und die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe vollen Zeilenrang.

(a) Stelle die KKT-Bedingungen auf und formuliere diese als lineares Gleichungssystem.

(b) Ist der Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt?

Hausaufgabe 33: Beispiele für Guignard-CQ $\not\Rightarrow$ Abadie-CQ $\not\Rightarrow$ MFCQ $\not\Rightarrow$ LICQ

(a) Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sodass} \quad & x_1 \cdot x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Guignard-CQ, aber nicht die Abadie-CQ erfüllt ist.

(b) Gegeben seien die Funktionen $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$c(y) := \begin{cases} (y+1)^2, & y < -1, \\ 0, & -1 \leq y \leq 1, \\ (y-1)^2, & y > 1, \end{cases}$$

$g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1(x) := c(x_1) - x_2$, $g_2(x) := c(x_1) + x_2$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige konvexe und stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{sodass} & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \end{array}$$

ein konvexes Problem ist. Welche constraint qualifications aus Definition 16.5, 17.9 und 17.14 sind im Punkt $x^* = (0, 0)$ erfüllt?

(c) Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{sodass} & -x_1^3 - x_2 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array}$$

im Nullpunkt $x^* = (0, 0)$ die Bedingung MFCQ erfüllt ist, aber LICQ nicht erfüllt ist.