

---

## Mathematik für Ingenieure - WS2023/24

### Übungsblatt 11

---

**Aufgaben mit Lösungshilfe.** Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

**Aufgabe 1:** Für die zufälligen Ereignisse  $A$  und  $B$  gelten die Relation  $A \subset B$  sowie die Wahrscheinlichkeiten  $P(A) = 0.6$  und  $P(B) = 0.8$ .

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der nachstehenden Ereignisse.

- (a)  $P(A \cap B)$       (b)  $P(A|B)$       (c)  $P(B|A)$       (d)  $P(A \cup B)$       (e)  $P(\bar{A}|B)$   
(f)  $P(B|\bar{A})$       (g)  $P(A \cup \bar{B})$       (h)  $P(\bar{A} \setminus B)$       (i)  $P(B \setminus A)$

**Aufgabe 2:** Ein (mathematisches) Pendel schwinge ohne Dämpfung. Die maximale Auslenkung des Pendels betrage  $2^\circ$ .

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt  $t$  die Auslenkung größer als  $1^\circ$  ist.

Vergleichen Sie mit der Lösung der Schwingungsgleichung  $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$  zur Beschreibung einer freien ungedämpften Schwingung.

*Hinweis:* Für kleine Auslenkungen kann  $\sin \varphi \approx \varphi$  angenommen werden.

**Aufgabe 3:** In einem Betrieb sind durchschnittlich 96% der hergestellten Erzeugnisse brauchbar. Von jeweils 100 brauchbaren Erzeugnissen eignen sich im Mittel 75 für den Einbau in Präzisionsgeräten.

Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

$A$  ... Ein zufällig ausgewähltes Erzeugnis ist brauchbar.

$B$  ... Ein zufällig ausgewähltes Erzeugnis eignet sich für den Einbau in Präzisionsgeräten.

- (a) Geben Sie die Ereignisrelation zwischen  $A$  und  $B$  an.  
(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein brauchbares Erzeugnis für den Einbau in Präzisionsgeräten geeignet ist.  
(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erzeugnis, das für den Einbau in Präzisionsgeräten geeignet ist, brauchbar ist.  
(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein unbrauchbares Erzeugnis für den Einbau in Präzisionsgeräten geeignet ist.  
(e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erzeugnis für Präzisionsgeräte geeignet ist.

**Aufgabe 4:** Man beweise:

$$\forall n, k \geq 1 : \quad k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

**Aufgabe 5:** Zur Kontrolle der Zuverlässigkeit von Federelementen wird ein beschleunigtes Prüfverfahren benutzt:

- Einwandfreie Federn werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 auch als einwandfrei eingestuft.
- Untaugliche Federn werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 als solche erkannt.

Durchschnittlich sind 3% der produzierten Federn untauglich.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- eine als gut eingestufte Feder untauglich ist.
- eine als untauglich eingestufte Feder gut ist.
- Berechnen Sie, wie viele tatsächlich einwandfreie Federn enthält im Mittel ein Posten von 350 als einwandfrei eingestuften Federn.

---

**Selbständige Bearbeitung.** Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

**Aufgabe 6:** Ein Autokennzeichen wird gebildet aus

- mindestens 1, maximal 2 Buchstaben des Alphabets (insgesamt 26 Buchstaben) und
- einer Zahl bestehend aus mindestens 2, maximal 3 Ziffern (ohne "0" an erster Stelle).

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

- ein Buchstabe auch mehrmals erscheinen darf?
- ein Buchstabe maximal einmal erscheinen darf?

**Aufgabe 7:** Ein System bestehe aus 20 Elementen der gleichen Zuverlässigkeit  $p$ . Alle Elemente arbeiten unabhängig voneinander. Die Zuverlässigkeit des Systems soll mindestens 0,9 betragen. Wie groß muss  $p$  mindestens sein, wenn die 20 Elemente...

- ... in Reihe geschaltet sind?
- ... parallel geschaltet sind?

**Aufgabe 8:** Ist für die Elemente  $A \in \mathcal{E}$  und  $B \in \mathcal{E}$  eines Ereignisfeldes  $\mathcal{E}$  die Relation

$$P(A|B) = P(A)$$

erfüllt, so heißt  $A$  *unabhängig* vom Ereignis  $B$ .<sup>1</sup>

Die zufälligen Ereignisse  $A$  und  $B$  seien unabhängig mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(A) = 0.6$  und  $P(B) = 0.8$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- |                    |                         |                         |                               |                    |
|--------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------------|--------------------|
| (a) $P(A \cap B)$  | (b) $P(A B)$            | (c) $P(B A)$            | (d) $P(A \cup B)$             | (e) $P(\bar{A} B)$ |
| (f) $P(B \bar{A})$ | (g) $P(A \cup \bar{B})$ | (h) $P(\bar{A} \cap B)$ | (i) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ |                    |

---

<sup>1</sup>Es folgt daraus auch  $B$  unabhängig von  $A$ .

**Aufgabe 9:** Drei Maschinen produzieren gleichartige Teile, die gemeinsam in einem Zwischenlager aufbewahrt werden. Die erste und zweite Maschine produzieren pro Zeiteinheit gleich viel, die dritte Maschine jedoch doppelt soviel wie Maschine 1. Die durchschnittlichen Ausschussquoten der Maschinen betragen 2%, 1% bzw. 5%.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig dem Lager entnommenes Teil Ausschuss ist.
- (b) Ein zufällig aus dem Lager ausgewähltes Teil sei kein Ausschuss. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Teil auf Maschine 3 gefertigt wurde.