08 Trust-Region-Verfahren
09 schnelle lokale Konvergenz, Lösung des TR-Teilproblems

Nichtlineare Optimierung

WS 2020/21

Prüfung

- Die Prüfungen werden mündlich per BBB-Videokonferenz stattfinden.
- Prüfungszeitraum 05.02.2021 bis einschließlich 23.03.2021
- Prüfungsinhalte: Skript, Konsultation, Übungen
- siehe auch Ordner „Prüfung“ im OPAL

Termine über Frau Glanzberg
Di und Fr Vormittag

Quizfrage

Schritt von x^k nach x^{k+1}

Was ist ein wesentlicher Unterschied zwischen Liniensuch- und Trust-Region-Verfahren?

→ Umfrage

0 A Trust-Region-Verfahren konvergieren schneller.

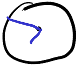
0 B Trust-Region-Verfahren konvergieren langsamer.

7 C Bei Trust-Region-Verfahren werden Richtung und Länge des Schrittes gleichzeitig bestimmt.

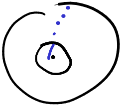
1 D Bei Trust-Region-Verfahren kann man kein benutzer-definiertes Skalarprodukt M verwenden.

in der Literatur oft nicht!

TR



LS



$s^T H s = s^T \left(\frac{H + H^T}{2} \right) s$

Quizfrage

quadr. Modell

Das Trust-Region-Teilproblem für $s \in \mathbb{R}^n$ lautet

$$\text{Minimiere} \quad q_k(s) = \underline{f(x_k)} + f'(x_k)\, s + \frac{1}{2} s^\top H_k\, s$$
$$\text{unter} \quad \|s\|_M \leqslant \Delta_k.$$

Was sollte man für die Modell-Hessematrix H_k fordern?

→ Umfrage

pos. Definitheit wird nicht benötigt:

0 A H_k sollte symmetrisch positiv definit sein.

0 B H_k sollte positiv definit sein.

7 C H_k sollte symmetrisch sein.

0 D H_k kann beliebig sein.

Quizfrage

Wie ist der Fortschrittsquotient ρ_k bei einem Trust-Region-Verfahren an der Iterierten x_k mit dem Schrittvorschlag s_k definiert?

→ Umfrage

2 A $\dfrac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{-f'(x_k)\, s_k - \frac{1}{2} s_k^\mathsf{T} H_k\, s_k}$

7 B $\dfrac{\text{tatsächliche Reduktion}}{\text{vorhergesagte Reduktion}}$

0 C $\dfrac{f(x_k)}{f(x_k + s_k)}$

0 D $\dfrac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{f(x_k)}$

Illustration Fortschrittsquotient

$$\rho_k = \frac{\overbrace{f(x_k) - f(x_k + s_k)}^{\text{tatsächlich}}}{\underbrace{q_k(0) - q_k(s_k)}_{\text{vorhergesagt aus Modell}}} = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{\cancel{f(x_k)} - f'(x_k)\, s_k - \frac{1}{2} s_k^\top H_k\, s_k}$$

$q_k(0) = f(x_k)$

Quizfrage

Zur Entscheidung welcher Frage(n) dient der Fortschrittsquotient?

→ Umfrage

0 A Akzeptanz des Schrittvorschlags

1 B Anpassung des TR-Radius'

7 C Akzeptanz des Schrittvorschlags und Anpassung des TR-Radius'

0 D Konvergenzkontrolle (Abbruchbedingung)

Quizfrage

Der CP lässt sich ohne Optimierungsverfahren ausrechnen!

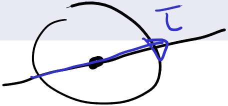
Was bezeichnet man als Cauchy-Punkt des TR-Teilproblems?

$$\text{Minimiere} \quad q(s) = f(x) + f'(x)\, s + \frac{1}{2}\, s^\top H\, s$$

$$\text{unter} \quad \|s\|_M \leqslant \Delta$$

$s \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}$

$$\text{und} \quad \boxed{s = -\tau \nabla_M f(x)}$$



→ Umfrage

0 A $s = 0$

3 C $s = -\nabla_M f(x)$

ignoriert Δ

5 B Lösung eingeschränkt auf Vielfache von $\nabla_M f(x)$

0 D irgendeine inexakte Lösung

Quizfrage

für $s \in \mathbb{R}^n$

Wozu dient die Fraction-of-Cauchy-decrease-Bedingung mit $0 < \alpha \leqslant 1/2$ beim TR-Teilproblem?

$$\operatorname{pred}(s) \geqslant \alpha \, \|g\|_M \, \min\left\{\Delta, \frac{\|g\|_M^3}{\max\{0, g^\top H \, g\}}\right\} \text{ bzw.}$$

$$\operatorname{pred}(s) \geqslant \alpha \, \|g\|_M \, \min\left\{\Delta, \frac{\|g\|_M}{\max\{0, \lambda_{\max}(H; M)\}}\right\}$$

0 A Test, ob man den Cauchy-Punkt bereits gefunden hat

0 B Test, ob H positive Eigenwerte hat

3 C Test, ob der Cauchy-Punkt Abstieg im Modell bringt.

4 D wichtige Zutat für die globale Konvergenz

Der CP bringt immer Abstieg im Modell! $\operatorname{pred}(s^C) > 0$

Quizfrage

Newton-System

$\nabla^2 f(x_k)\, d_k = -\nabla f(x_k)$

Reicht die Fraction-of-Cauchy-decrease-Bedingung auch für die schnelle lokale Konvergenz beim TR-$\boxed{\text{Newton}}$-Verfahren?

$H_k = \nabla^2 f(x_k)$

→ Umfrage

0 **A** Ja

0 **B** Mit TR-Verfahren kann man keine schnelle lokale Konvergenz bekommen.

3 **C** Nein, man benötigt auch, dass die berechneten Schrittweitenvorschläge s_k hinreichend genaue Lösungen des Newton-Systems sind.

Satz 6.11

4 **D** Ja, aber man muss irgendwann die TR-Nebenbedingung abschalten.

Inex. Lösungs des TR-Teilproblems

Leitlinien:

- Funktionswert $q(s)$ nicht größer als $q(s^C)$
  Cauchy-Decrease-Cond. mit $\alpha = \frac{1}{2}$
- Falls der TR-Bereich nicht relevant wird und keine Suchrichtung neg. Krümmung auftritt, soll das LGS $Hs = -b$ mit einstellbarer Genauigkeit gelöst werden.
- TR-Radius respektieren

Quizfrage

Kann man das CG-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $H\,s = -b$ (mit H spd) so modifizieren, dass diese Leitlinien zur inexakten Lösung des TR-Teilproblems

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & q(s) = f + b^\top s + \frac{1}{2}\, s^\top H\, s \\ \text{unter} \quad & \|s\|_M \leqslant \Delta \end{aligned}$$

umgesetzt werden?

5 A Ja, das ist das Steihaug-Toint-CG-Verfahren.

0 B Ja, man macht einfach nur eine Iteration.

0 C Ja, das ist das inexakte CG-Verfahren.

0 D Nein, man muss ein anderes Lösungsverfahren verwenden.

$\frac{1}{2} x^T A x - b^T x \Leftrightarrow Ax = b \quad \hat{=} \quad \frac{1}{2} s^T H s + g^T s + c$

Steihaug(-Toint)-CG-Verfahren

Setze $\ell := 0$, $s_0 := 0$, $r_0 := +b$, $p_0 := -M^{-1} r_0$ und $\delta_0 := -r_0^\mathsf{T} p_0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Setze $q_\ell := H p_\ell$ und $\kappa_\ell := p_\ell^\mathsf{T} q_\ell$
  if $\kappa_\ell > 0$ **then**
    Setze $\alpha_\ell := \delta_\ell / \kappa_\ell$ und $s_{\ell+1} := s_\ell + \alpha_\ell p_\ell$
    if $\|s_{\ell+1}\|_M > \Delta$ **then**
      Bestimme α_ℓ^* als die pos. Lösung von $\|s_\ell + \alpha p_\ell\|_M = \Delta$
      Setze $s_{\ell+1} := s_\ell + \alpha_\ell^* p_\ell$
      Setze $\ell := \ell + 1$, Abbruch der **while**-Schleife
    end if
    Setze $r_{\ell+1} := r_\ell + \alpha_\ell q_\ell$ und $p_{\ell+1} := -M^{-1} r_{\ell+1}$
    Setze $\delta_{\ell+1} := -r_{\ell+1}^\mathsf{T} p_{\ell+1}$ und $\beta_{\ell+1} := \delta_{\ell+1} / \delta_\ell$
    Setze $p_{\ell+1} := p_{\ell+1} + \beta_{\ell+1} p_\ell$ und $\ell := \ell + 1$
  else Suchrichtung nicht-pos. Krümmung
    Bestimme α_ℓ^* als die positive Lösung von $\|s_\ell + \alpha p_\ell\|_M = \Delta$
    Setze $s_{\ell+1} := s_\ell + \alpha_\ell^* p_\ell$
    Setze $\ell := \ell + 1$, Abbruch der **while**-Schleife
  end if
end while
return s_ℓ

s_1 ist der CP!

Zeit für Ihre Fragen

Was sind Ihre Fragen zu den Themen der Woche?

$\rightarrow$ Benutzen Sie den Chat.

Fragen und Antworten 1

Fragen und Antworten 2