

**Mathematik IV (für IF, ET, Ph)**

Sommersemester 2025

## 5. Übung: Laurentreihen und Residuensatz

**Aufgabe 1**

Entwickeln Sie die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

- a)  $0 < |z| < 1$ ,  
 b)  $0 < |z - 1| < 1$ .

**Aufgabe 2**

Lösen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

- a)  $\int_K \frac{-i \cos z}{z} dz$  mit  $K : |z - 2| = 3$ ,  
 b)  $\int_K \frac{e^z}{z^3} dz$  mit  $K : |z - 1| = 4$ ,  
 c)  $\int_K \frac{z}{(z+1)^2(z+2)} dz$ ,  $K : |z| = e$ ,  
 d)  $\int_K \frac{z^{21}}{(z-1)^{21}} dz$ ,  $K : |z - 1| = 4$ .

**Aufgabe 3**

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung des uneigentlichen Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$ .

- a) Berechnen Sie zunächst das Integral  $\int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3}$ . Dabei ist  $C_R$  der positiv orientierte Halbkreis bestehend aus dem Intervall  $[-R, R]$  und dem Kreisbogen  $A_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$ .

- b) Berechnen Sie  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{A_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3}$ .

- c) Nutzen Sie die Ergebnisse der ersten beiden Teilaufgaben, um  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$  zu berechnen!