Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Michael Meinhold

Dresden, 24. November 2023

Mathematik für Ingenieure - WS2023/24
Übungsblatt 8

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

(a) $-\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) = 9x(t)$
(b) $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$
(c) $2y''(x) + 20y'(x) + 50y(x) = 0$
(d) $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$
(e) $y''(x) - 2a \cdot y'(x) + a^2 \cdot y(x) = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

Aufgabe 2: Die charakteristische Gleichung 4. Grades einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung mit konstanten (reellen) Koeffizienten besitzt die doppelt zu zählende Lösung $\lambda_{1,2} = -1 - i$, wobei i mit $i^2 = -1$ die imaginäre Einheit bezeichnet.

Ermitteln Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

Aufgabe 3: Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + 2 \cdot y'(x) + y(x) = q(x)$$

mit dem Störglied $q(x)$.

Ermitteln Sie für die nachfolgenden Störglieder den jeweiligen Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung.

(a) $q(x) = x^2 - 2x + 1$
(b) $q(x) = x^3 - x$
(c) $q(x) = 3 \cdot \exp(-1 \cdot x)$
(d) $q(x) = 2 \cdot \exp x + \cos x$
(e) $q(x) = \exp(-1 \cdot x) \cdot \cos x$

Aufgabe 4: Gegeben sind die inhomogenen linearen Differentialgleichungen der Form

$$a_n \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 \cdot y(x) = q(x) \quad (a_i \in \mathbb{R},\, n \geq 2).$$

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen von

(a) $y''' + y' = e^x$
(b) $y^{(4)} - 2y'' + y = x^2$
(c) $y''' - 3y' + 2y = 2e^x + \sin x$
(d) $y'' + y' - 6y = 5e^{2x}$
(e) $y'' - 4y' + 4y = (x-3)e^{2x}$
(f) $y'' - 7y' + 6y = 12x - 2$
(g) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^x \sin x$
(h) $y''' + 2y'' + y' = 10 \cos x$

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Gegeben ist die Lösungs(-kurven-)schar

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x}, \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

einer gewöhnlichen Differentialgleichung 3. Ordnung (C_1, C_2, und C_3 sind Scharparameter).

(a) Begründen Sie, dass (1) einer Differentialgleichung der Form $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$ mit konstanten Koeffizienten a, b, c und d genügt.[1] Berechnen Sie diese Koeffizienten.

(b) Geben Sie die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ an, d. h. bestimmen Sie die Scharparameter.

Aufgabe 6: Für n reelle Funktionen

$$f_i : D \to \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

einer reellen Variablen $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ ist die Wronski-Determinante definiert durch

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) := \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{2}$$

worin $f_i^{(j)}(x)$ mit $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ die j-te Ableitung der Funktion f_i (insbesondere f_i' deren erste Ableitung) bezeichnet.

(a) Berechnen Sie unter Anwendung eines geeigneten Verfahrens schriftlich die Wronski-Determinante für die Funktionen

$$f_1 : x \mapsto x^2 - 1, \quad f_2 : x \mapsto x + 1, \quad f_3 : x \mapsto x - 1 \quad \text{und} \quad f_4 : x \mapsto x^3 \tag{3}$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob f_1, f_2, f_3 und f_4 aus Formelnummer (3) linear unabhängig auf $\mathbb{R}$ sind.

Hinweis: Die Determinante aus Aufgabenteil ((a)) kann zur Beantwortung von Aufgabenteil ((b)) benutzt werden.

[1] Die Differentialgleichung enthält keinen der Scharparameter C_1, C_2 oder C_3, ist also für jede Wahl erfüllt.