

Standardsituationen im Mathematikunterricht

Thema: Begriffe erarbeiten am Beispiel des Prismas
- Beispiele aus Matheunterricht in der Sekundarstufe I

Witold Horoch & Toni Ehmcke

13.01.2025

Nimm Stellung zu folgender Aussage

“Begriffe in der Mathematik sind wie Legosteine: Die Mathematik ist aus ihnen aufgebaut.”



(Bild: Worshae. unsplash.com)

Welche Begriffe führt man im Matheunterricht ein?

Nimm an der folgenden Umfrage teil, indem du den QR-Code scannst.

Optional: Besuche [menti.com](https://www.menti.com) und benutze den Code **6693 6706**



Was ist ein Begriff?



„Von einem Begriff sprechen wir dann, wenn damit nicht nur ein einzelnes Objekt oder ein Gegenstand, sondern eine Gesamtheit oder Kategorie gemeint ist, zu der der Gegenstand gehört.“
(vgl. Weigand, 2012)

(Bild: Microsoft Office Designer)

Was ist ein Begriff?



„Man spricht allgemein von einem Begriff, wenn eine Anzahl von Objekten oder Ereignissen aufgrund gewisser überstimmender Merkmale mit einem gemeinsamen Namen belegt wird.“
(vgl. Weinert, 1974)

(Bild: Diego FH. unsplash.com)

Welche Arten von Begriffen gibt es?



(Bild: Jan Antonin Kolar. unsplash.com)

Eigenschaftsbegriffe

Werden *einzelnen* Objekten zugesprochen

Beispiele: dreieckig, rechteckig, Primzahl, ...

Relationsbegriffe

Werden *Paaren, Tripeln, ...* von Objekten zugesprochen.

Beispiele: ... ist größer als ..., ... liegt zwischen ... und ...

(vgl. Zech, 1996)

Welche Arten von Begriffen gibt es?



(Bild: Jan Antonin Kolar. unsplash.com)

Einfache Begriffe

Grundbegriffe, die “keiner weiteren Erklärung bedürfen” (Axiomatik).

Beispiele: Punkt, Gerade, ... liegt auf ...

Abgeleitete Begriffe

Können auf Grundbegriffe zurückgeführt werden.

Beispiele: Trapez (als Viereck mit den Eigenschaften ...), Spiegelung (als Bewegung mit der Eigenschaft ...)

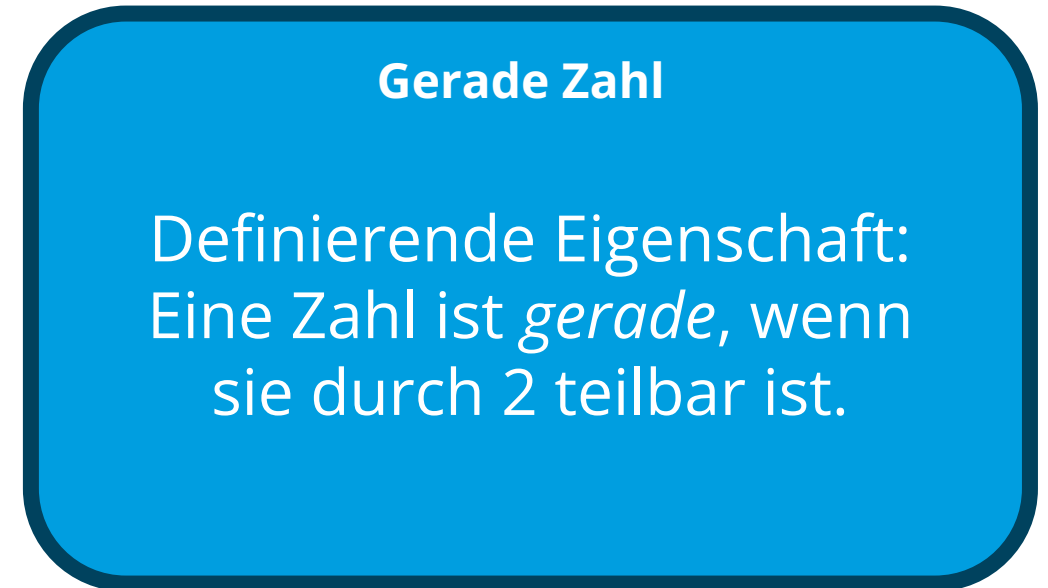
(vgl. Zech, 1996)

Wie kann man Begriffe einführen?

Die „Anatomie“ einer Begriffsdefinition



(Bild: Eigene Darstellung)



(vgl. Vollrath, 2012)

Übung

Gib die folgenden Eigenschaften eines Begriffs aus der [Menti-Umfrage](#) an.

- 1) Eigenschafts- oder Relationsbegriff?
- 2) Grundbegriff oder abgeleiteter Begriff?
- 3) Begriffsinhalt
- 4) Begriffsumfang

Wie kann man Begriffe erarbeiten?

Das EIS-Prinzip

Enaktive Ebene

Handlungen mit konkreten Objekten

Ikonische Ebene

Arbeiten mit bildhaften Darstellungen

Sprachliche / Symbolische Ebene

Arbeiten mit bildhaften Darstellungen

Beispiele

Körper ordnen, falten, konstruieren, ...

Bilder von Parallelogrammen, Rechtecken, Quadraten ordnen, ...

Beschreibung / Erklärung von Merkmalen, formale Definition des Begriffs

(vgl. Sturm, 2012)

Wie kann man Begriffe erarbeiten?

Exemplarische Begriffsbildung

Erarbeitung des Begriffs durch Kennenlernen von *Repräsentanten*. (vgl. Vollrath, 2012)

Beispiel

Erarbeitung des Begriffs "Quadratzahl":

Die Zahlen "1, 4, 9, 16, ..." sind Beispiele für Quadratzahlen.

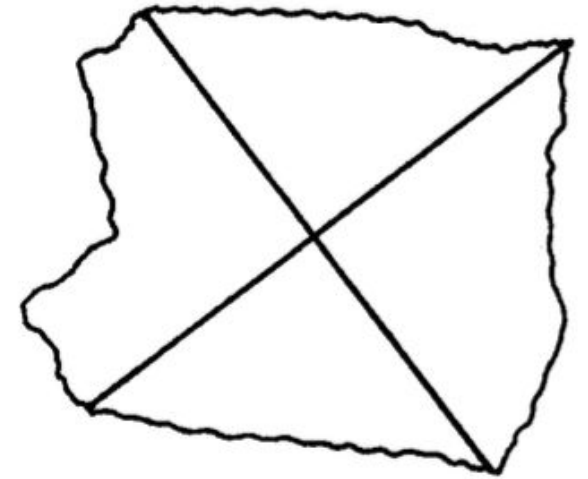
Wie kann man Begriffe erarbeiten?

Begriffsbildung durch Abstraktion

Erarbeitung des Begriffs durch *Idealisierung* realer Objekte und anschließender Zuordnung zu einem mathematischen Objekt mit gewissen Eigenschaften. (vgl. Weigand, 2015)

Beispiel

Erarbeitung des Begriffs "... und ... sind senkrecht zueinander" anhand von verschiedenen Falmlinien von Papier.



(Bild: Vollrath, 2012)

Wie kann man Begriffe erarbeiten?

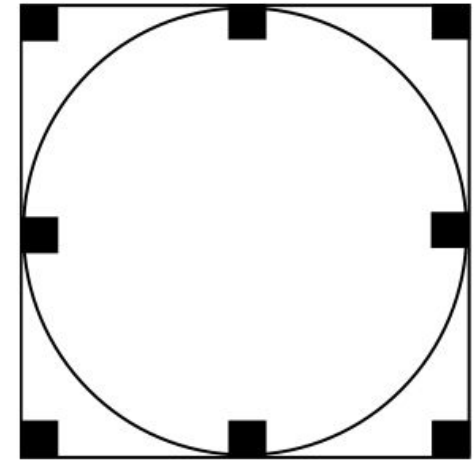
Begriffsbildung im Problemkontext

Erarbeitung des Begriffs durch Einbettung in ein interessantes Problem.
(vgl. Vollrath, 2012)

Beispiel

Erarbeitung des Begriffs "Ellipse" mit einer Problemstellung.

Was geschieht mit einem Kreis, wenn man in einer Computergraphik an den mittleren "Ziehpunkten" zieht?



(vgl. Vollrath, 2012)

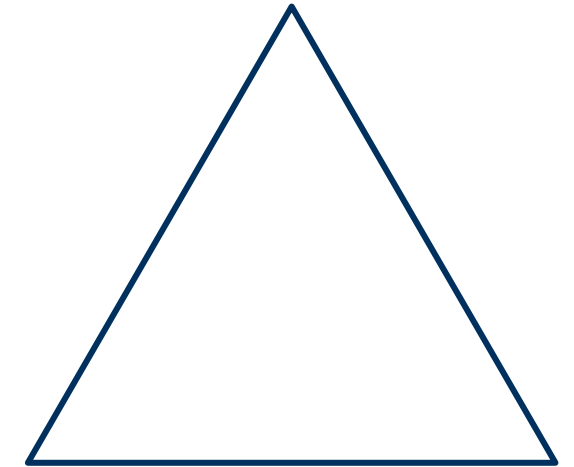
Wie kann man Begriffe erarbeiten?

Begriffsbildung durch Spezifikation aus einem Oberbegriff

Durch Angeben zusätzlicher Eigenschaften für einen bekannten Begriff, können neue Unterbegriffe abgeleitet werden.
(vgl. Weigand, 2015)

Beispiel

Ein "gleichseitiges Dreieck" ist ein Dreieck mit gleich langen Seiten.



(Bild: eigene Darstellung)

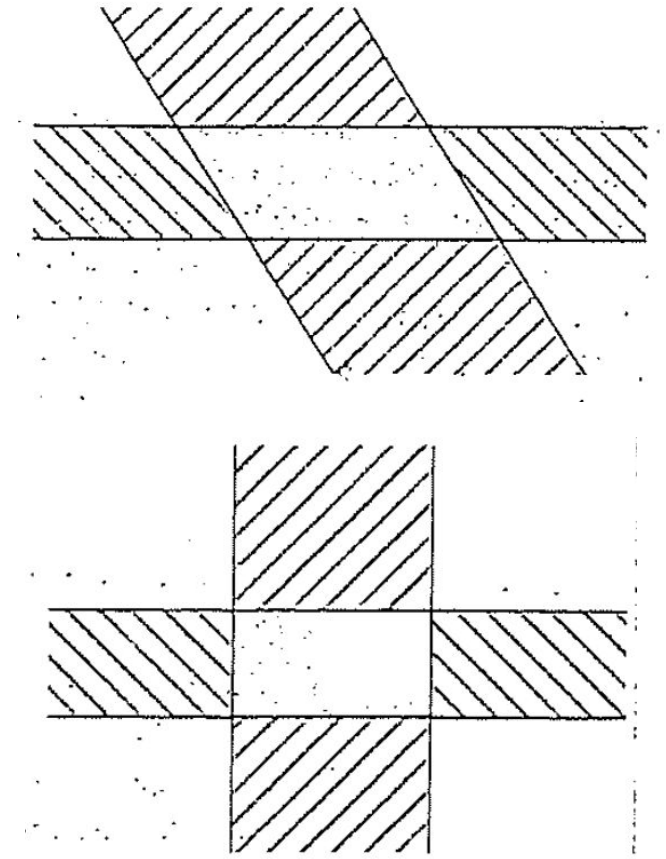
Wie kann man Begriffe erarbeiten?

Begriffsbildung durch Operieren

Durch (reales, virtuelles oder mentales) Verändern von Objekten können verschiedene Repräsentanten eines Begriffs erzeugt und Merkmale identifiziert werden.
(vgl. Weigand, 2015)

Beispiel

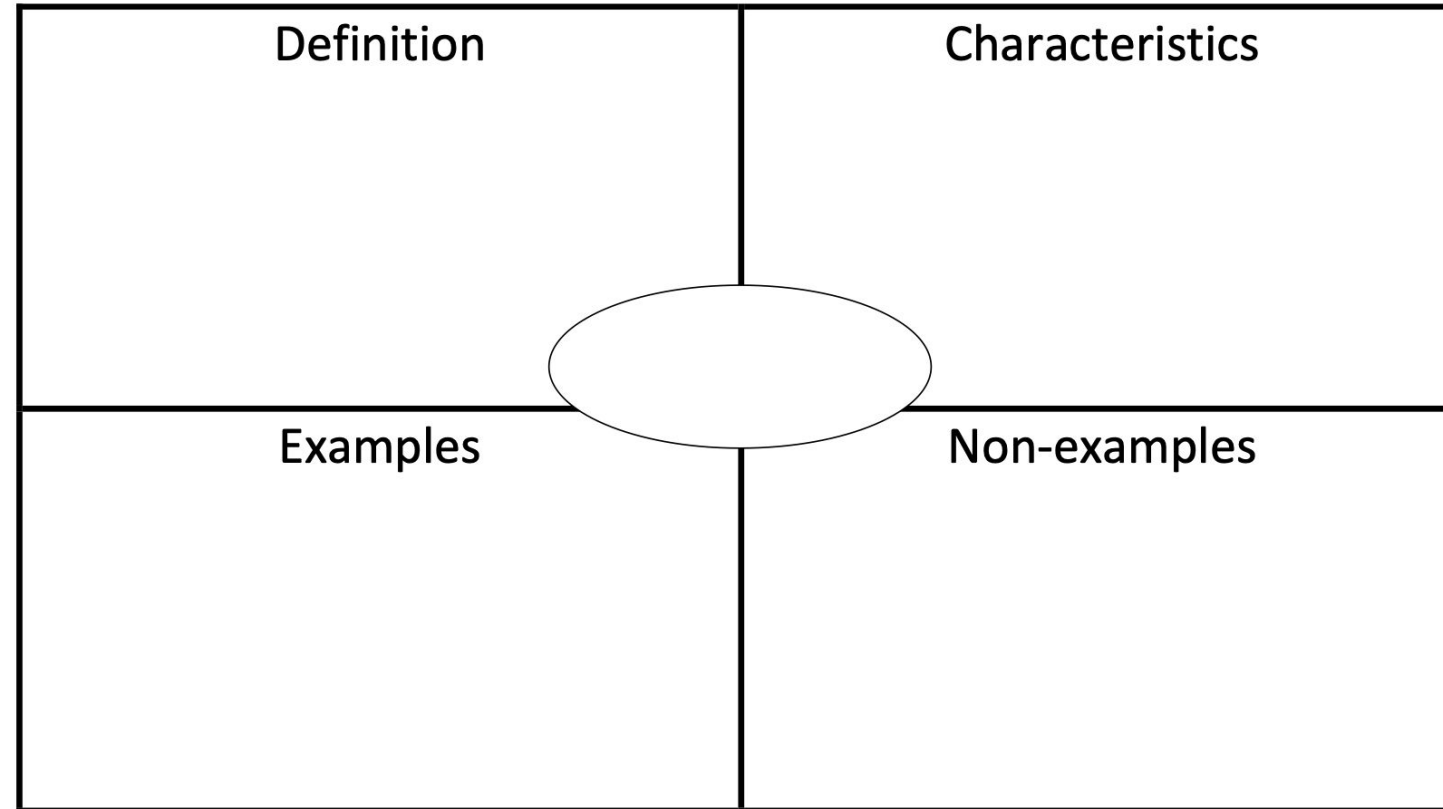
Erarbeiten des Begriffs "Parallelogramm" mit übereinandergelegten Folienstreifen.



(Bild: Weigand, 2009)

Wie kann man Begriffe erarbeiten?

Das Frayer-Modell



(Wisconsin Department of Public Instruction, Zugriff am: 11.1.2025)

Wie kann man Begriffe erarbeiten?

Das Frayer-Modell

BEISPIEL: Frayer-Modell

Meine Definition

[alternativ: Meine Erklärung]

Alle Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) bezeichnet man als quadratische Funktionen.

Eigenschaften/Beschreibung:

- Der Graph ist eine Parabel.
- Die Steigung des Graphen ist keine Konstante.
- Die Funktion kann eine, zwei oder keine Nullstellen haben.
- $f(x) = x^2$ wird als Normalparabel bezeichnet.

quadratische Funktionen

Beispiele:

$$f(x) = (x - 2)^2$$

$$f(x) = (x + 2)^2 + 3$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 4$$

Beispiele für quadratische Funktionen und deren Graphen kennen wir von Brücken, Tunneln, Kirchen, Snowboardsprüngen und geworfenen Gegenständen.

Gegenbeispiele:

- alle Funktionen, die nicht quadratisch sind, also nicht 2 als höchsten Exponenten besitzen
- z. B. lineare Funktionen der Form $f(x) = mx + b$

(Bild: Sturm, 2012)

Was sind mögliche Lernschwierigkeiten?



(Bild: Getty Images. unsplash.com)

Begriffsnamen können mit bestimmten Vorstellungen verbunden sein

Auf Unterschiede zwischen *Umgangssprache* und *mathematischer Fachsprache* ist beim Unterrichten hinzuweisen!

Beispiel:

Umgangssprache

Vater und Sohn sehen einander ähnlich.

Mathematische Fachsprache

Die Dreiecke sind ähnlich zueinander.

(vgl. Vollrath, 2012)

Was sind mögliche Lernschwierigkeiten?



(Bild: Tim Mossholder. unsplash.com)

Begriffsnamen können mit negativen Erfahrungen verbunden sein

Die affektive Seite des Lernens sollte bei der Unterrichtsplanung nicht vernachlässigt werden! Begriffslernen ist mit freudigen und schönen Erfahrungen zu verbinden.

Beispiel:

“Brüche habe ich noch nie verstanden, das brauche ich gar nicht erst versuchen zu verstehen.“

(vgl. Vollrath, 2012)

Erarbeiten von Begriffen: Begriff "Prisma" - Verankerung in Lehrplänen

Lernbereich 4: Geometrische Körper 20 Ustd.

Anwenden der Kenntnisse über geometrische Grundformen sowie über Lagebeziehungen auf das Beschreiben von realen Objekten

Kennen von Verfahren des Darstellens von Quadern, aus Quadern zusammengesetzter Körper und gerader Prismen

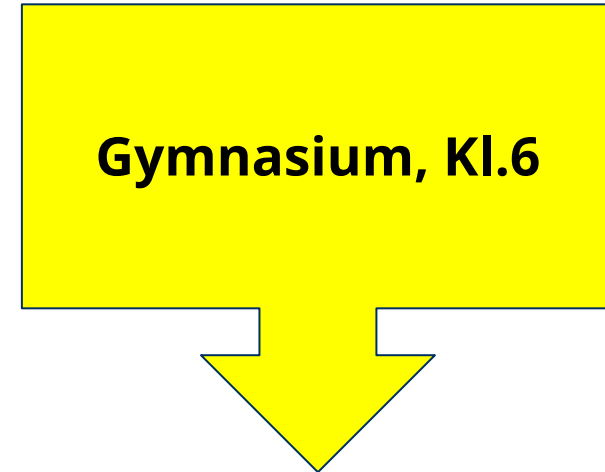
- Grundriss und verschiedene Seitenansichten
- Schrägbild
- Körpernetz

⇒ Kommunikationsfähigkeit
Zusammenarbeit mit DE: Merkmale beschreiben der Texte

- Kl. 5, LB 3
- GS Kl. 3, LB 1

Kopfgeometrie

⇒ Methodenkompetenz
Herstellen von Körpern



Lernbereich 4: Prismen 12 Ustd.

Kennen der Eigenschaften von Prismen

Beherrschen des Darstellens von Prismen

- Kavalierperspektive
- Körpernetz

Beherrschen des Berechnens von Oberflächeninhalt und Volumen gerader Prismen sowie bei aus Prismen zusammengesetzten Körpern

Bau von Modellen

Projekt „Verpackungsmüll“ oder „Wir bauen eine Stadt der Fantasie“

⇒ Bildung für nachhaltige Entwicklung

Begriffsbildung im Mathematikunterricht

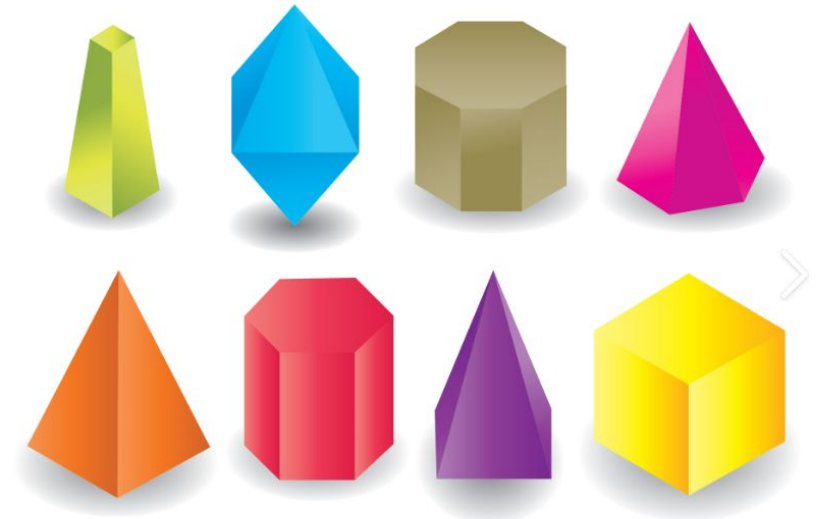
Was ist ein Prisma?

Definition: Inhalt und Umfang

Beispiele: Würfel, Quader, Dreiecksprisma

Gegenbeispiele: Pyramide, Zylinder

Bild: Gezeichnete Prismen und Nicht-Prismen



(Bild: www.vecteezy.com, kawanbelajar348.blogspot.com)

Didaktische Methoden zur Begriffsbildung

- Problemkontexte: Beispiele aus - Alltag und Architektur
- Vielfältige Darstellungen:
 - Symbolisch, grafisch, physisch
- Verknüpfungen zu anderen Begriffen:
 - Würfel als spezielles Prisma



(Bild: variotrans-glas.de)

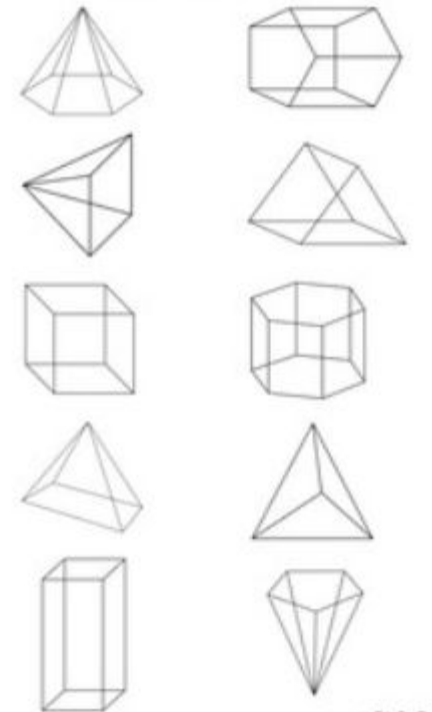
Prozess der Begriffsbildung

- **Beispiele sammeln**
- **Eigenschaften herausarbeiten**
- **Definition erarbeiten**
- **Anwendung und Reflexion**



Fehlerkultur beim Thema „Prisma“

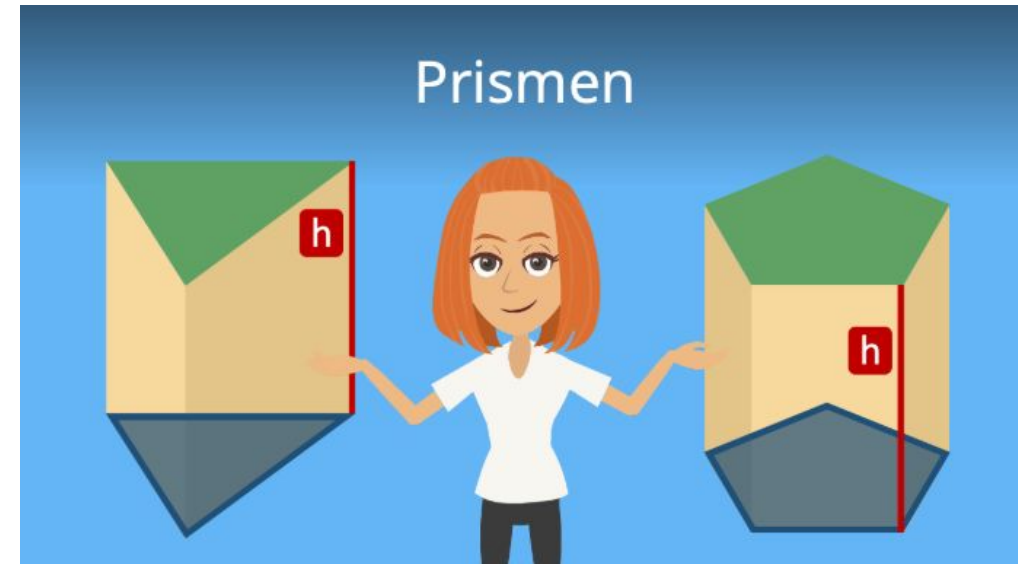
- **Typische Fehler: Verwechslung mit Pyramide, falsche Annahmen**
- **Fehler als Lernchancen nutzen**



(Bild: www.teacherspayteachers.com)

Praxisbeispiel im Unterricht

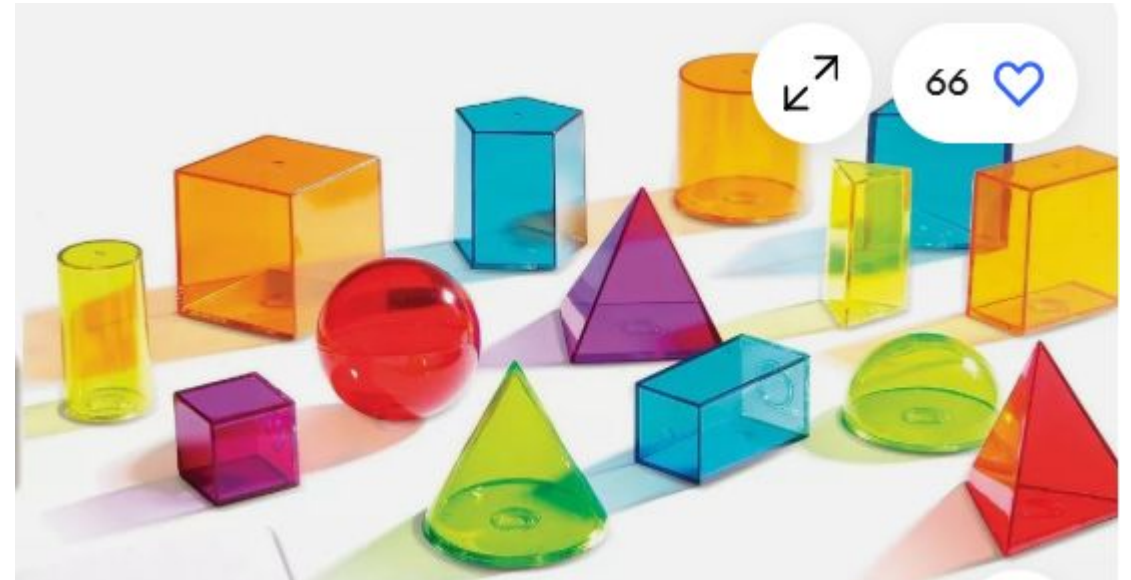
- **Untersuchung von Modellen**
- **Erarbeitung der Definition**
- **Anwendung auf Alltagsbeispiele**



(Bild: studyflix.de)

Beispiel für einen Einstieg in das Thema

Nachdem sich die Schüler das Thema "Prismen" in Matheheftern notiert haben, werden ihnen verschiedene Körper aber auch Gegenstände aus dem Alltag gezeigt.



(Bilder: Suchmaschine Bing; www.bing.com)

Beispielgegenstände

Schüler werden gefragt, ob sie bei den Körpern und Gegenständen bestimmte Gemeinsamkeiten feststellen.



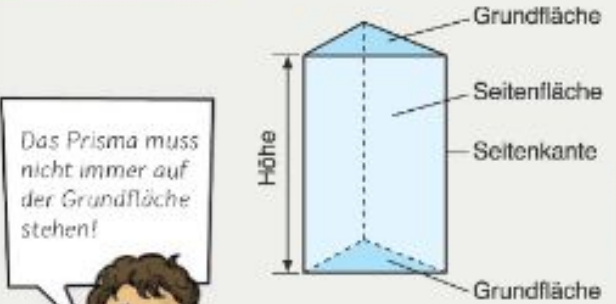
Danach werden sie gebeten, sich im Klassenraum umzusehen auf der Suche nach ähnlichen Gegenständen, d. h. Prismen.

(Bilder links: metro.de,; Bild rechts: de.dreamstime.com)

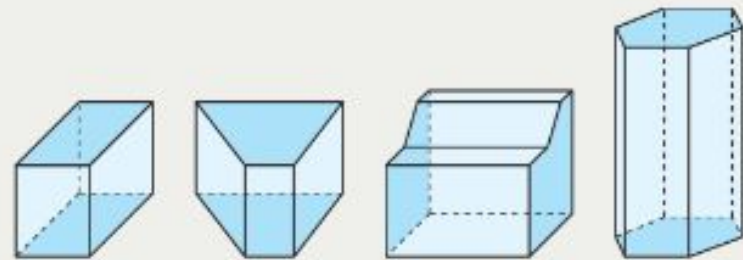
Definition von Prismen

Gemeinsam wird nun im Lehrbuch nach Definition geschaut, die wird auch notiert:

Information



Das Prisma muss nicht immer auf der Grundfläche stehen!



Dreiseitiges Prisma Vierseitige Prismen Sechsstufige Prismen

Ein **Prisma** ist ein Körper, dessen **Grundflächen** zueinander parallele und zueinander kongruente (deckungsgleiche) Vielecke sind.

Die **Seitenflächen** sind Rechtecke; sie bilden zusammen die **Mantelfläche**.
Die Länge der **Seitenkanten** ist die **(Körper-)Höhe** des Prismas.
Ist die Grundfläche ein Dreieck, so heißt das Prisma *dreiseitiges Prisma*.
Ist die Grundfläche ein Viereck, so nennt man das Prisma *vierseitiges Prisma* usw.

Beachte:

- Jeder Quader ist auch ein Prisma.
- Ein Prisma kann auf einer Grundfläche stehen oder auf einer Seitenfläche liegen.

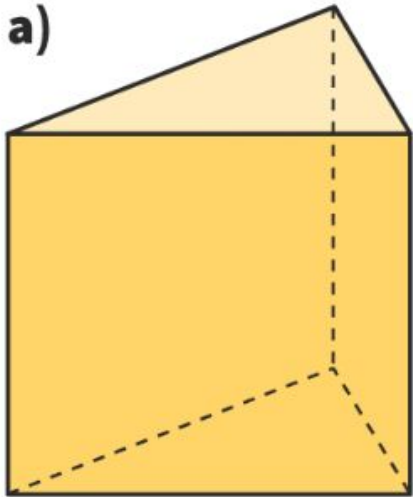
Übungsphase

Prismen werden nun auf Anzahl von Ecken, Kanten und Flächen geprüft:

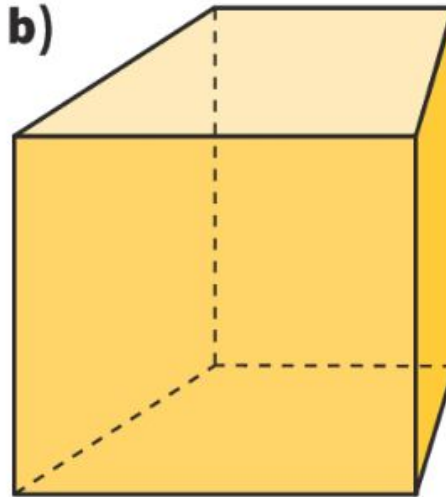
Beispielaufgabe:

Wie viele Ecken, Kanten, Flächen hat das Prisma?

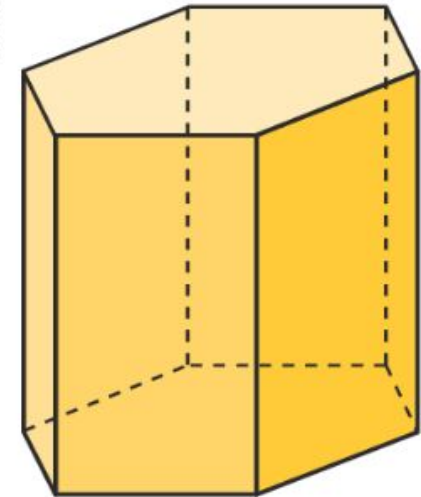
a)



b)



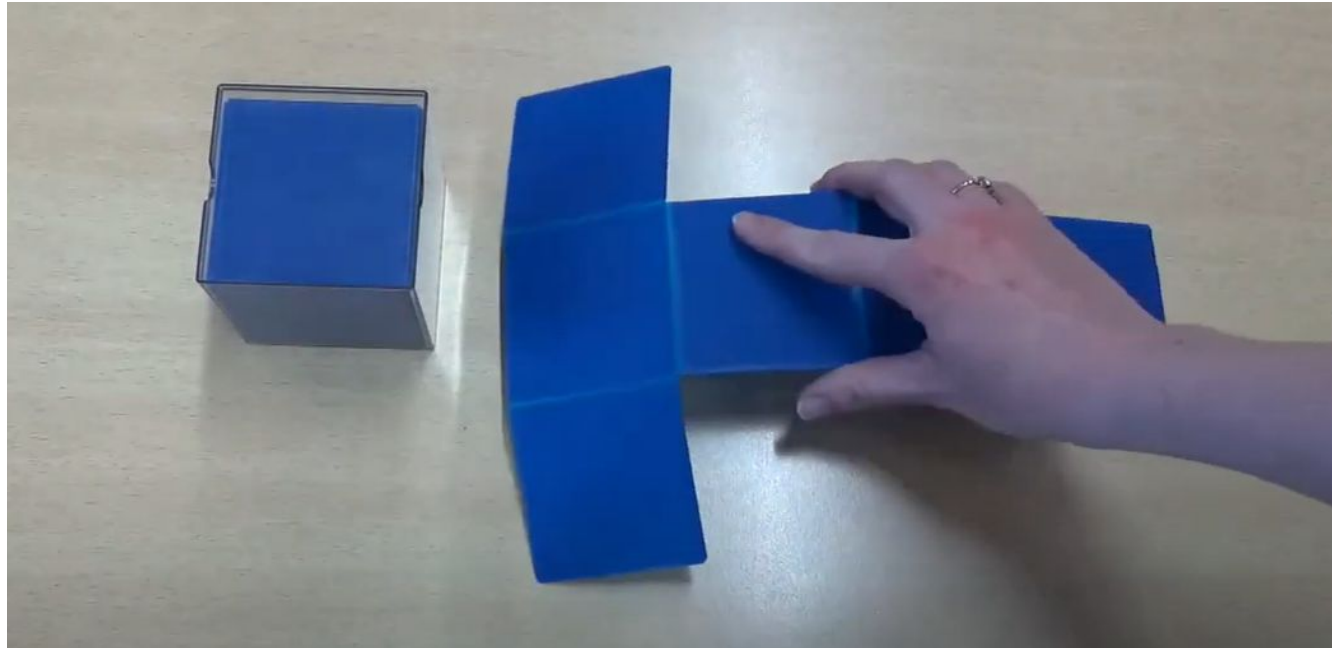
c)



(Bild: Lehrbuch "Mathematik heute", Westermann Verlag)

Prismen: das Netz

Den Schülern wird nun präsentiert, wie ein Beispielprisma zerlegt wird, sie werden an den Begriff **Netz** erinnert. Dies kann mit geeigneten Lehrmitteln veranschaulicht werden.



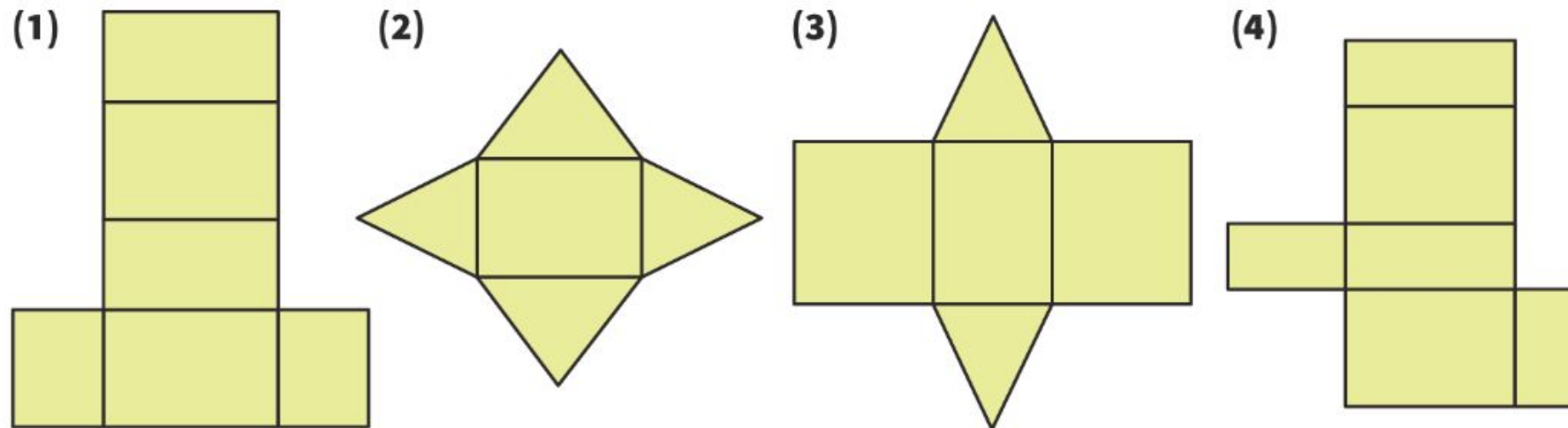
(Bild: youtube.com, Titel: Lernvideo Körper, Flächen, Netz)

Übungsphase

Schüler versuchen nun, Prismen von anderen Körpern anhand ihrer Netze zu unterscheiden:

Beispielaufgabe:

Welches Netz gehört zu einem Prisma? Begründe und erkläre deinem Nachbarn.



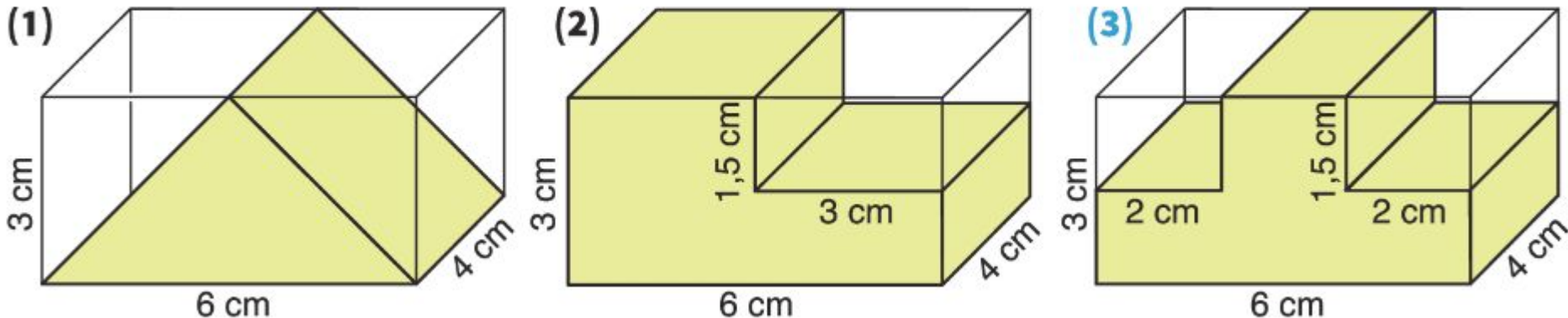
(Bild: Lehrbuch "Mathematik heute", Westermann Verlag)

Übungsphase

Es folgt eine Aufgabe, wo Schüler nun selbst aus gegebenen Körpern das entsprechende Netz zu zeichnen haben:

Beispielaufgabe:

Zeichne jeweils ein Netz des grünen Prismas. Färbe die Mantelfläche.



(Bild: Lehrbuch "Mathematik heute", Westermann Verlag)

Wann haben die Lernenden einen Begriff wirklich verstanden?

Mögliche kognitive Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- ... die Bezeichnung des Begriffs nennen.
- ... Beispiele und Gegenbeispiele nennen bzw. identifizieren und ihre Entscheidung begründen (Begriffsumfang).
- ... definierende und charakteristische Eigenschaften benennen (Begriffsinhalt). (vgl. Sturm, 2012)



(Bild: Curated Lifestyle. unsplash.com)

Wann haben die Lernenden einen Begriff wirklich verstanden?

Mögliche kognitive Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler können ...

... mit den zum Begriff gehörigen Objekten in verschiedenen Zusammenhängen in korrekter Fachsprache sicher arbeiten (Anwendungen).

... die Objekte des Begriffs scharf von anderen verwandten Begriffen abgrenzen und in das zugehörige Begriffsnetz einordnen (Ober-, Unter- und Nebenbegriffe).

(vgl. Sturm, 2012)



(Bild: Curated Lifestyle. unsplash.com)

Ergebnissicherung im Unterricht

Neben verschiedenen anderen Methoden der Ergebnissicherung ist auch ein Multiple-Choice-Quiz aus 5 Fragen mit Hilfe von **Plickers** als Methode zu sehen, die sich bewährt hat.

Vorteile:

- geliebt von Schülern
- transparent, gerecht und schnell durchführbar da automatisiertes Verfahren
- ganz schnell auszuwerten und Ergebnisse zu präsentieren
- in der Regel gute, die Schüler motivierende Ergebnisse (Noten)
- einfach zu erstellende Protokolle der Quiz, falls Bedarf besteht.

Nachteile: keine bekannt :)

(Bild: <https://lecafedufle.fr/>; plickers.com)



Fazit

- **Bedeutung der Begriffsbildung am Beispiel „Prisma“**
- **Didaktische Vielfalt und konstruktiver Umgang mit Fehlern**

FAZIT!

(Bild: Adobe Stock)

Quellen

"Mathematik heute", Verlag Westermann, Ausgabe 2020 für Sachsen, ISBN 978-3-14-151541-1

Sturm, R. (2016): Schritt für Schritt zum guten Mathematikunterricht. Seelze: Klett/Kallmeyer, S. 176 - 180

Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag S. 48f., S. 108f., S. 227 - 238

Weigand, H.-G. (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum, S. 99 - 112

Weigand, H.-G. (2012). Begriffe lehren - Begriffe lernen. In: mathematiklehren, Heft 172, S. 2 – 9

Weigand, H.-G (2015). Begriffsbildung. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker et al.: Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 255 - 269

Weinert, F.E. (1974). Einführung in das Problemgebiet der Pädagogischen Psychologie. In: Weinert, F. E. u.a. Funkkolleg Pädagogische Psychologie, Bd. 1, S.664

Wisconsin Department of Public Instruction: Frayer-Model.

https://dpi.wi.gov/sites/default/files/imce/ela/bank/6-12_L.VAU_Frayer_Model.pdf (Zugriff am: 11.01.2025)

Zech, F. (1996). Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim, Basel: Beltz Verlag, Kapitel 9