

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2025

5. Übung: Laurentreihen und Residuensatz

Aufgabe 1

Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

a) $0 < |z| < 1$,

b) $0 < |z-1| < 1$.

Lösung: Wiederholung Laurent-Reihe: f sei auf offener Menge G bis auf isolierte Singularitäten analytisch, z_0 sei eine Singularität mit Umgebung (Kreisscheibe) ohne weitere Singularitäten, dann gibt es eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

(a) Wir entwickeln die Funktion auf der offenen Kreisscheibe mit Radius 1 um z_0 . Unter Verwendung der geometrischen Reihe mit $q = z$, $|z| < 1$ folgt

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z \underbrace{(1-z)}_{|z| < 1}} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k.$$

(b) Es folgt analog mit $q = 1-z$, $|1-z| < 1$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1) \underbrace{(1-(1-z))}_{|z| < 1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1-z)^k = \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k = \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{k+1} (z-1)^k.$$

Aufgabe 2

Lösen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

a) $\int_K \frac{-i \cos z}{z} dz$ mit $K : |z-2| = 3$,

b) $\int_K \frac{e^z}{z^3} dz$ mit $K : |z-1| = 4$,

c) $\int_K \frac{z}{(z+1)^2(z+2)} dz$, $K : |z| = e$,

d) $\int_K \frac{z^{21}}{(z-1)^{21}} dz, \quad K : |z-1| = 4.$

Lösung: Wiederholung Residuensatz:

$$\oint_{\partial U(z_0)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0),$$

Residuum im Falle $f(z) = \frac{q(z)}{(z-z_0)^m}$ (Pol m -ter Ordnung) mit $q(z_0) \neq 0$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} q^{(m-1)}(z_0).$$

a) Die Funktion besitzt eine einfache Singularität in $z_0 = 0$, diese wird von K umrundet. Somit folgt

$$\int_K \frac{-i \cos z}{z} dz = 2\pi i (-i \cos 0) = 2\pi.$$

b) In $z_0 = 0$ ist ein Pol dritter Ordnung, somit folgt mit $q''(z) = e^z$

$$\int_K \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi i \frac{e^0}{2} = \pi i.$$

c) Die Funktion besitzt zwei Polstellen, wir müssen also zwei Residuen bestimmen. Für den Pol zweiter Ordnung in $z_1 = -1$ folgt mit $q'(z) = 2(z+2)^{-2}$ für das Residuum $\operatorname{Res}(f, -1) = 2$. Für den einfachen Pol in $z_2 = -2$ gilt $\operatorname{Res}(f, -2) = -2$. Insgesamt folgt somit

$$\int_K \frac{z}{(z+1)^2(z+2)} dz = 2\pi i (2 - 2) = 0.$$

d) Hier haben wir einen Pol 21. Ordnung in $z_0 = 1$, somit folgt

$$\int_K \frac{z^{21}}{(z-1)^{21}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) = 2\pi i \frac{1}{20!} q^{(20)}(z_0) = 2\pi i \frac{21!}{20!} = 42\pi i.$$

Aufgabe 3

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

a) Berechnen Sie zunächst das Integral $\int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3}$. Dabei ist C_R der positiv orientierte Halbkreis bestehend aus dem Intervall $[-R, R]$ und dem Kreisbogen $A_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi\}$.

b) Berechnen Sie $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{A_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3}$.

c) Nutzen Sie die Ergebnisse der ersten beiden Teilaufgaben, um $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ zu berechnen!

Lösung:

a) Die Polstellen der Funktion sind aufgrund

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{1}{(z + i)^3(z - i)^3}$$

Pole dritter Ordnung an den Stellen $z_{1/2} = \pm i = e^{\pm \frac{\pi}{2}i}$. Somit ist das geschlossene Integral (über eine auf dem einfach zusammenhängendem Integrationsgebiet holomorphe Funktion) nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich Null. Wir interessieren uns hier aber für den Fall $R > 1$. Um das Integral zu berechnen, benötigen wir das Residuum von $z_1 = i$ ($z_2 = -i$ liegt nicht im Integrationsgebiet). Wir benötigen die zweite Ableitung des Restterms $q(z) = (z + i)^{-3}$. Es gilt $q'(z) = -3(z + i)^{-4}$ und somit $q''(z) = 12(z + i)^{-5}$. Wir erhalten

$$\int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{12}{2(2i)^5} = \pi i \frac{12}{32i} = \frac{3}{8}\pi.$$

b) Wir schätzen den Betrag des komplexen Kurvenintegrals ab. Die Parametrisierung der Kurve und dessen Ableitung entlang der Kurve ergibt sich zu

$$z(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi] \implies z'(t) = Rie^{it}.$$

Insbesondere gilt $|z(t)| = |z'(t)| = R$. Da wir am Fall $R \rightarrow \infty$ interessiert sind, können wir uns auf das Gebiet außerhalb der Singularitäten beschränken, also sei $R > 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{((Re^{it})^2 + 1)^3} dt \right| \leq \int_{A_R} \left| \frac{Rie^{it}}{((Re^{it})^2 + 1)^3} \right| dt = \int_{A_R} \frac{|Rie^{it}|}{(|(Re^{it})^2 + 1|)^3} dt \\ &\stackrel{|\cdot| \geq R^2 - 1}{\leq} \int_{A_R} \frac{R}{(R^2 - 1)^3} dt = \frac{R\pi}{(R^2 - 1)^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da der Grenzwert des Betrages des Kurvenintegrals durch Null abgeschätzt wurde, muss auch das Kurvenintegral selbst für große R gegen Null konvergieren.

c) Da sich C_R unterteilen lässt in A_R und das Intervall $[-R, R]$ auf der reellen Achse, gilt

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} - \int_{A_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} = \frac{3}{8}\pi - \frac{R\pi}{(R^2 - 1)^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{3}{8}\pi$$

und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{3}{8}\pi.$$