Hausaufgabe Nr.19

Dennis P. Kliem

56856

26.01.2022

1 Reihenfolge der Matrizenmultiplikation

1.1 a) Anzahl der Rechenoperationen

Die Variante $(A \cdot B) \cdot C$ werde als I, die Variante $A \cdot (B \cdot C)$ als II bezeichnet. Für die Anzahl der Rechenoperationen gilt dann jeweils:

	I	II
Summanden im 1. Schritt[1]:	m	l
Additionen im 1. Schritt[1]:	$m-1$	$l-1$
	$\cdot$	$\cdot$
Komponenten im 1. Schritt:	$n \cdot l$	$m \cdot r$
	$+$	$+$
Summanden im 2. Schritt[1]:	l	m
Additionen im 2. Schritt[1]:	$l-1$	$m-1$
	$\cdot$	$\cdot$
Komponenten im Ergebnis:	$n \cdot r$	$n \cdot r$
	$=$	$=$
Gesamtzahl an Additionen:	$(m-1) \cdot n \cdot l + (l-1) \cdot n \cdot r$	$(n-1) \cdot m \cdot r + (r-1) \cdot m \cdot l$
Gesamtzahl an Multiplikationen:	$m \cdot n \cdot l + l \cdot n \cdot r$	$l \cdot m \cdot r + m \cdot n \cdot r$

Diese Gleichungen wiederum lassen sich umstellen und zusammenfassen:

$$\begin{aligned}(m-1) \cdot n \cdot l + (l-1) \cdot n \cdot r &= m \cdot n \cdot l - n \cdot l + n \cdot l \cdot r - n \cdot r \\ &= n \cdot (l \cdot (m-1+r) - r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n-1) \cdot m \cdot r + (r-1) \cdot m \cdot l &= n \cdot m \cdot r - m \cdot r + m \cdot l \cdot r - m \cdot l \\ &= m \cdot (r \cdot (n-1+l) - l)\end{aligned}$$

$$m \cdot n \cdot l + l \cdot n \cdot r = n \cdot l \cdot (m+r)$$

$$l \cdot m \cdot r + m \cdot n \cdot r = m \cdot r \cdot (n+l)$$

Die effizienteste Reihenfolge der Matrizenmultiplikation ist also von den jeweiligen Dimensionen der Teilmatrizen abhängig.

[1] Jeweils pro Komponente der Ergebnismatrix

1.2 b) Am konkreten Beispiel

Angenommen,

$$
\begin{aligned}
n &= 1.000 \\
m &= 10 \\
l &= 2 \\
r &= 100
\end{aligned}
$$

, dann würde nach den zuvor hergeleiteten Gleichungen für I und II gelten:

$$
\begin{aligned}
n \cdot (l \cdot (m - 1 + r) - r) &< m \cdot (r \cdot (n - 1 + l) - l) \\
1.000 \cdot (2 \cdot (10 - 1 + 100) - 100) &< 10 \cdot (100 \cdot (1.000 - 1 + 2) - 2) \\
1.000 \cdot (2 \cdot 109 - 100) &< 10 \cdot (100 \cdot 1.001 - 2) \\
1.000 \cdot 118 &< 10 \cdot 100.099 \\
118.000 &< 1.000.990
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n \cdot l \cdot (m + r) &< m \cdot r \cdot (n + l) \\
1.000 \cdot 2 \cdot (10 + 100) &< 10 \cdot 100 \cdot (1.000 + 2) \\
2.000 \cdot 110 &< 1.000 \cdot 1.002 \\
220.000 &< 1.002.000
\end{aligned}
$$

, sodass die Variante I vergleichsweise deutlich effizienter[1], und deshalb auf jeden Fall der Variante II vorzuziehen ist.

D. Klein

[1] Addition: etwa 748,3% effizienter, Multiplikation: etwa 355,5% effizienter