Hausaufgabe Nr.16

Dennis P. Kliem, Mtk-Nr.: 56856

12.1.2022

Übung

$$T = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | v_1 = -v_2\} \iff T = \{(-v_2; v_2; v_3) | v_2; v_3 \in \mathbb{R}^3\} \tag{1}$$

Damit T ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ist, muss gelten:

$$\forall \lambda \in K \wedge \vec{v}; \vec{w} \in T : \lambda \cdot \vec{v} + \vec{w} \in T \tag{2}$$
$$T \subseteq \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

Dies wird anhand eines Vektors $\vec{u}$ gezeigt:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1; v_2; v_3) = (v_1; -v_1; v_3) \\
\vec{w} &= (w_1; w_2; w_3) = (w_1; -w_1; w_3) \\
\vec{u} &= (u_1; u_2; u_3) = (u_1; -u_1; u_3)
\end{aligned}$$

Nach (3) setzt sich der Vektor $\vec{u}$ folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \lambda \cdot \vec{v} + \vec{w} \\
(u_1; u_2; u_3) &= (\lambda \cdot v_1 + w_1; \lambda \cdot v_2 + w_2; \lambda \cdot v_3 + w_3) \\
&= (\lambda \cdot v_1 + w_1; \lambda \cdot (-v_1) + (-w_1); \lambda \cdot v_3 + w_3) \\
&= (\lambda \cdot v_1 + w_1; -\lambda \cdot v_1 - w_1; \lambda \cdot v_3 + w_3) \\
&= (\lambda \cdot v_1 + w_1; -(\lambda \cdot v_1 + w_1); \lambda \cdot v_3 + w_3) \\
&= (u_1; -u_1; u_3) \\
&\implies u_1 = -u_2 \text{ nach (1)} \\
&\implies \vec{u} \in T \\
&\implies T \subseteq \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

$\mathbb{QED}$.

Aufgabe 27

Wenn für $\vec{v}; \vec{w} \in V$ gilt:

$$\nexists \lambda_1; \lambda_2 \in K : (\lambda_1 \cdot \vec{v} = \lambda_2 \cdot \vec{w}) \wedge (\lambda_1 \neq 0) \wedge (\lambda_2 \neq 0)$$

Beziehungsweise:

$$\nexists \lambda_1; \lambda_2 \in K : \lambda_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{w} = 0$$

, dann heißen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ *linear unabhängig*. Dabei können sowohl $\vec{v}$, als auch $\vec{w}$ *Nullvektoren* sein.

Aufgabe 28

Das lineare Erzeugnis aller Vektoren $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; ...; \vec{v}_n$ mit $\vec{v} \in V$ und V ein Vektorraum über K ist definiert als die Menge aller Vektoren $\vec{v}$, die sich als $\vec{v} = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \vec{v}_i$ schreiben lassen. Diese Vektoren $\vec{v}$ nennt man auch die Linearkobinationen von $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; ...\vec{v}_n$.