

- 7.1. Randbedingungen und Gestaltungsprinzipien
- 7.2. Berechnung von Schienenfahrzeugtragwerken
 - 7.2.1. Inhalt der Berechnungsdokumentation
 - 7.2.2. Berechnungsverfahren für Schienenfahrzeugtragwerke

Modul SG. EG-Prüfung auf der Grundlage einer Einzelprüfung

1. Die EG-Prüfung auf der Grundlage einer Einzelprüfung ist der Teil eines EG-Prüfverfahrens, bei dem der Antragsteller die in den Nummern 2, 3, 4, 6.2 und 6.4 festgelegten Verpflichtungen erfüllt sowie gewährleistet und auf seine alleinige Verantwortung für die Einhaltung der geltenden Anforderungen des Systems den Nachweis erbringt.

Technische Unterlagen zur Konformitätsbeurteilung:

2. Der Antragsteller muss die folgenden Unterlagen einzureichen:
- Funktionsbeschreibung inkl. Schnittstellen
 - Entwurfs-/Werk-/Installations-/Ausführungszeichnungen
 - Simulations-/Berechnungsberichte

„Der Nachweis der Festigkeit des Wagenkastens kann anhand von Berechnungen und/oder durch Prüfungen gemäß den Bedingungen in Abschnitt 9.2 der in Anlage 1-1 Ziffer 7 genannten Spezifikation geführt werden.“

(TSI Loc&Pas, Abschnitt 4.2.2.4)

3. Technische Unterlagen, die der Antragsteller zur Verfügung stellt, sind die Grundlage für die Bewertung der einschlägigen TSI zu bewerten. In den technischen Unterlagen sind die geltenden Anforderungen anzuführen und Entwurf, Fertigung, Installation/Montage und Betrieb des Teilsystems zu erfassen, soweit sie für die Bewertung von Belang sind.
- frühere Zertifikate (falls zutreffend; z.B. EG-Prüfbescheinigungen etc.)
 - frühere technische Dossiers & Dokumentationen (falls vorhanden)
 - frühere Herstellererklärungen (falls vorhanden)

Folie Nachweisdokumente zur Festigkeitsbewertung

„Der Umfang der eingereichten Dokumente und auch der Informationsgehalt sind hier (leider) sehr variabel, z.B. 16 Seiten Versuchsbericht vs. 1050 Seiten Berechnungsbericht.“

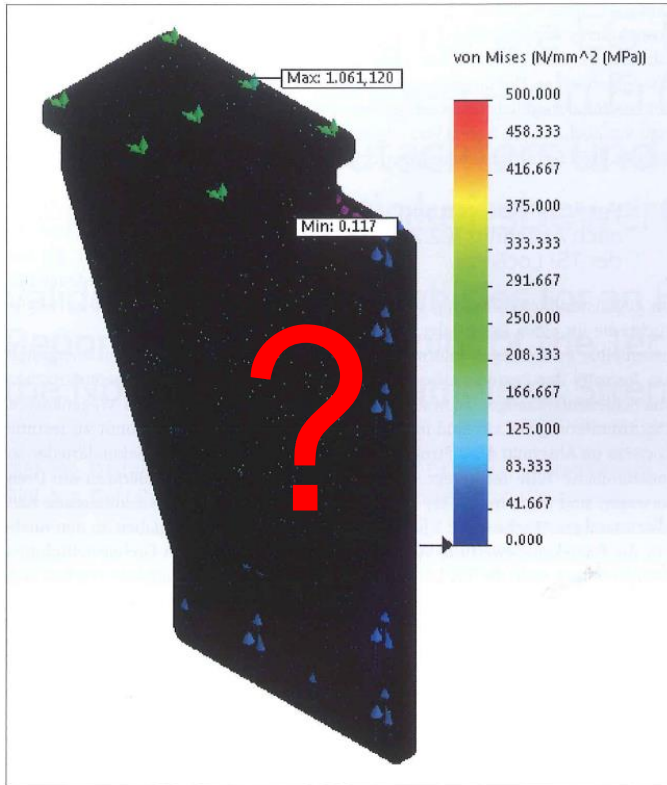


Bild 1: Spannungsdarstellung am Aufbau eines Güterwagens

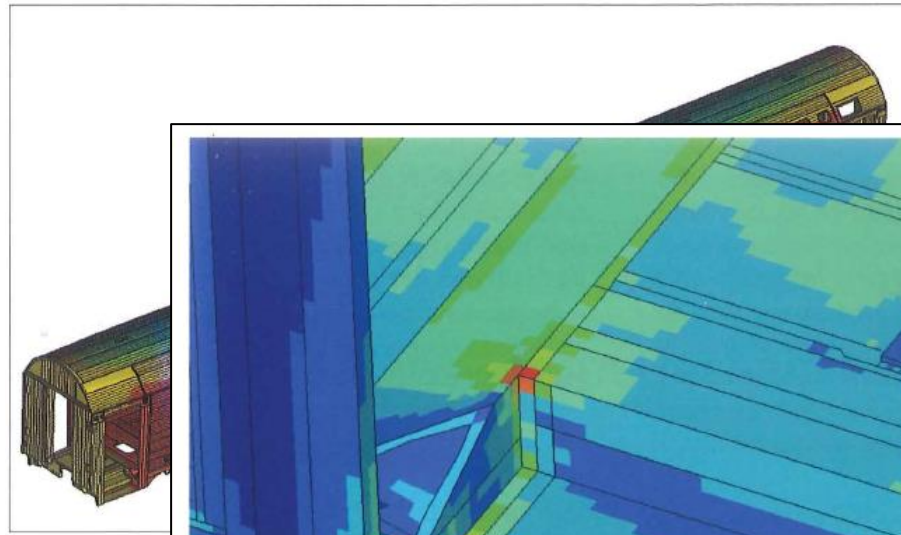


Bild 2: Deform

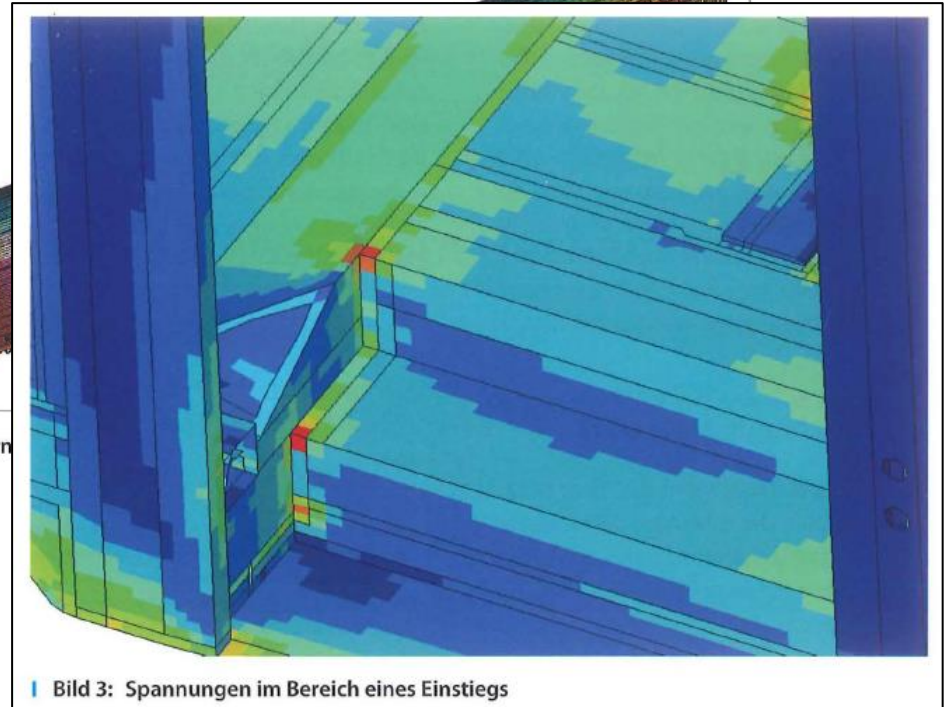


Bild 3: Spannungen im Bereich eines Einstiegs

(Krach; u.a.: Nachweisführung für die EG-Prüfung von Schienenfahrzeugen, ZEVrail 145(2021)Tagungsband SFT Graz)

„Der Umfang der eingereichten Dokumente und auch der Informationsgehalt sind hier (leider) sehr variabel, z.B. 16 Seiten Versuchsbericht vs. 1050 Seiten Berechnungsbericht.“



Bild 1: Spannungsdarstellung am Aufbau eines Güterwagons



(Krach; u.a.: Nachweisführung für die EG-Prüfung von Schienenfahrzeugen, ZEVrail 145(2021)Tagungsband SFT Graz)

Realistische Auswahl / Zusammenfassung / Normeninterpretation

variable Befestigung 20'- 30'- & 40'-Container → 8 Befestigungszapfen



Tabelle 24 — Festigkeitsanforderungen für Rückhaltevorrichtungen von Containern/Wechselaufbauten

	Richtung	Beschleunigung	Anzahl der haltenden Stellen
Nachweislasten	Längs	2 g	Gehalten an 2 beliebigen Stellen
	Quer	1 g	Gehalten an 2 beliebigen Stellen
	Vertikal abwärts	2 g	Gehalten an 4 Stellen
	Vertikal aufwärts	1 g	Gehalten an 2 beliebigen Stellen

(EN 12663-2:2010-07)

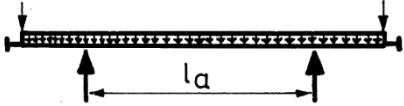
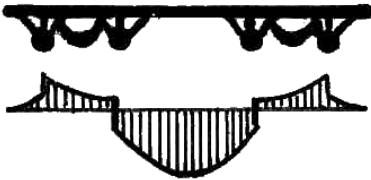

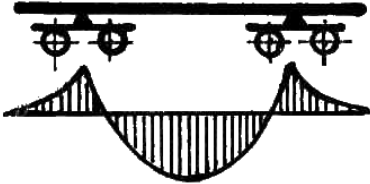

154
Lastfälle

(Krach; u.a.: Nachweisführung für die EG-Prüfung von Schienenfahrzeugen, ZEVrail 145(2021)Tagungsband SFT Graz)

- Nachweiskonzept:
 - rechnerischer Nachweis \leftrightarrow Nachweis durch Versuche
 - Ableitungskonstruktion \leftrightarrow Neukonstruktion
- Analysekonzept:
 - Beschreibung der Simulationsmodelle
 - geplante Validierung der Simulationsmodelle
- Gewichtsbilanz / Massenliste
- Konstruktionszeichnungen
- Berechnungsbericht:
 - Normenreferenz
 - berechnete Lastfälle
 - Ergebnisse
- Unterlagen zu Fertigung und Montage

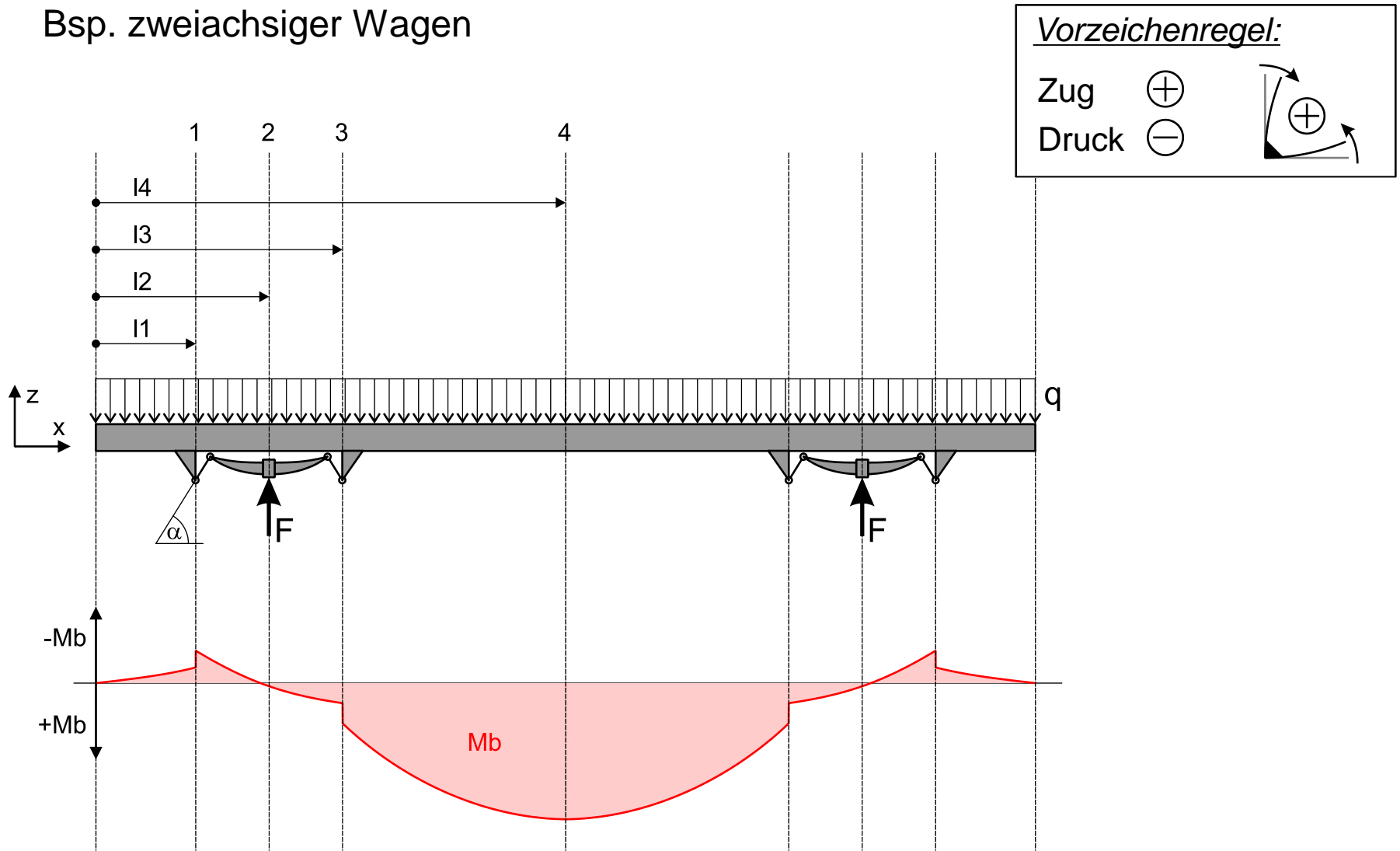
(Krach; u.a.: Nachweisführung für die EG-Prüfung von Schienenfahrzeugen, ZEVrail 145(2021)Tagungsband SFT Graz)

Folie Bsp. Untergestelle alleintragender Rahmen

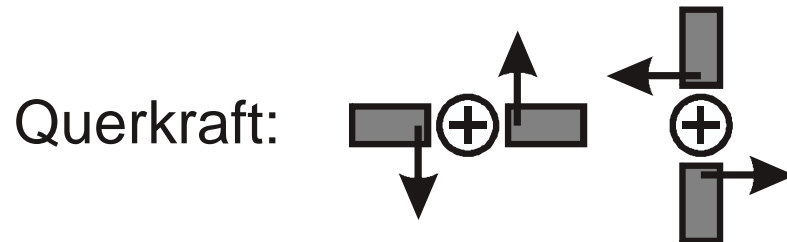
<p><i>Belastungsschema</i></p>	
<p>zweiachsiger Wagen</p>	 <p style="text-align: right;">Biegemomente</p>
<p>dreiachsiger Wagen</p>	
<p>Drehgestellwagen</p>	
<p>Drehgestellwagen mit Langträger mit veränderlichem Querschnitt</p>	

Folie Berechnung Untergestell alleintragender Rahmen

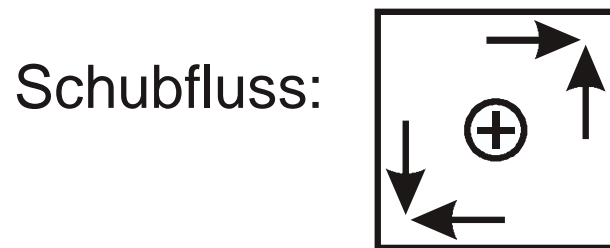
- Bsp. zweiachsiger Wagen



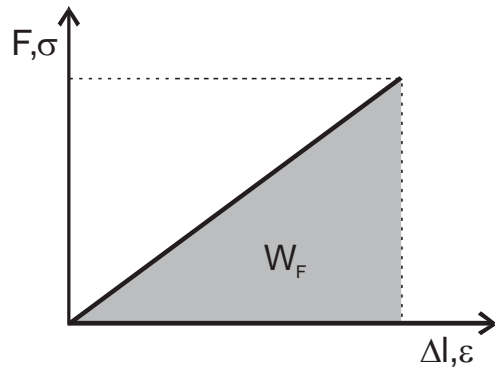
Längskraft: Zug \oplus
Druck \ominus



Zug an Unterfaser bzw. linker Faser und
Druck an Oberfaser bzw. rechter Faser



- Formänderungsarbeit



- absolute Formänderungsarbeit:
(Hooksches Gesetz)

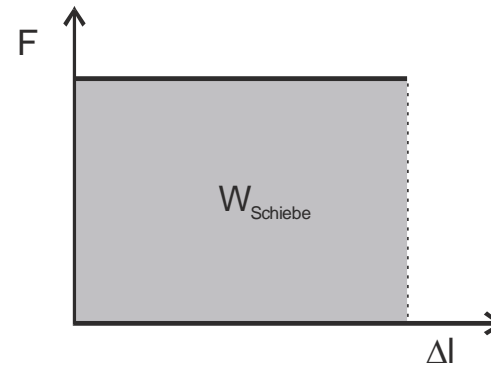
$$W_{F,abs} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l$$

- bezogen auf konstantes Volumen \rightarrow
spezifische Formänderungsarbeit

$$V = A \cdot l \rightarrow W_{F,spez.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

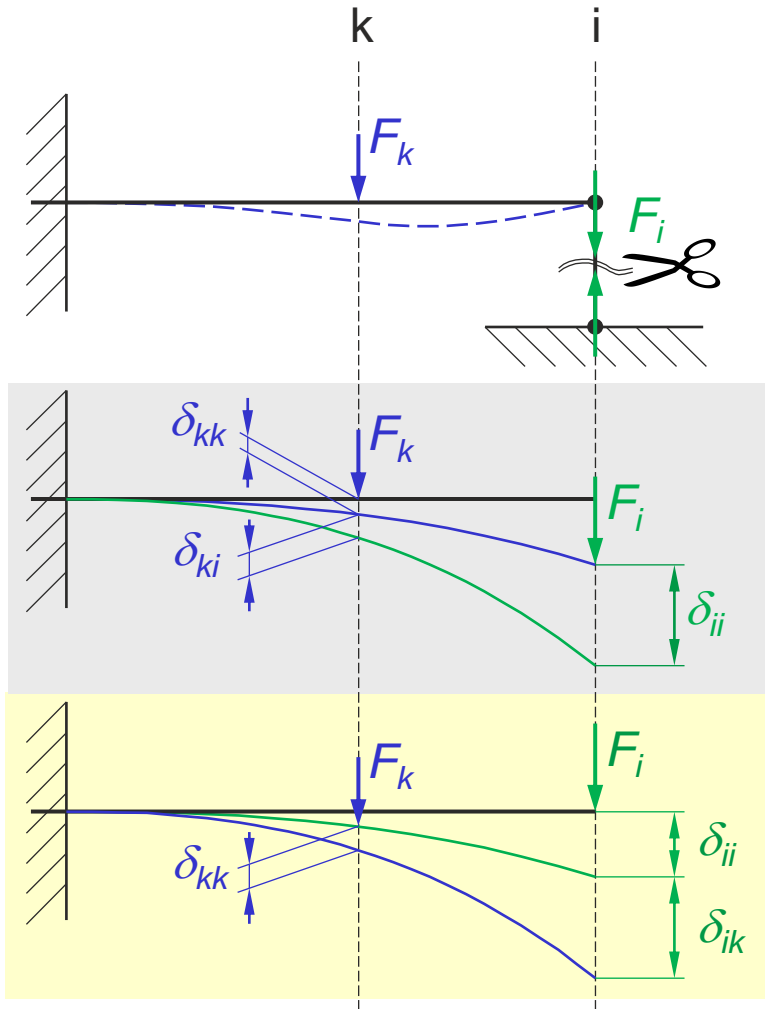
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \underline{\underline{W_{F,spez.}}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E}}}}$$

- Verschiebearbeit



$$\underline{\underline{W_{Schiebe} = F \cdot \Delta l}}$$

Folie Kraftgrößenverfahren – Gesamtarbeit an konkretem Bsp.



$$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot F_k \cdot \delta_{kk} + \frac{1}{2} \cdot F_i \cdot \delta_{ii} + F_k \cdot \delta_{ki} \quad \text{oben}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot F_i \cdot \delta_{ii} + \frac{1}{2} \cdot F_k \cdot \delta_{kk} + F_i \cdot \delta_{ik} \quad \text{unten}$$

$$F_k \cdot \delta_{ki} = F_i \cdot \delta_{ik}$$

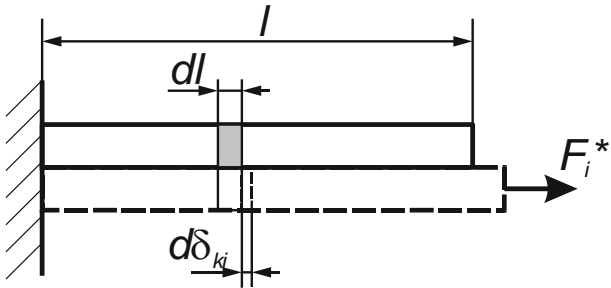
$$\delta_{ki} = \frac{F_i}{F_k} \cdot \delta_{ik}$$

δ_{ab}
 $a = \text{Ort und}$
 $b = \text{Ursache (KraftgröÙe)}$

} der Verrückung

δ_{10} – Verrückung im 1-System durch äußere Belastung

- Herleitung Verrückungswert für Längskraft:



F_i^* - Kraftwirkung im Stab durch F_i

$$\frac{d\delta_{ki}}{dl} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

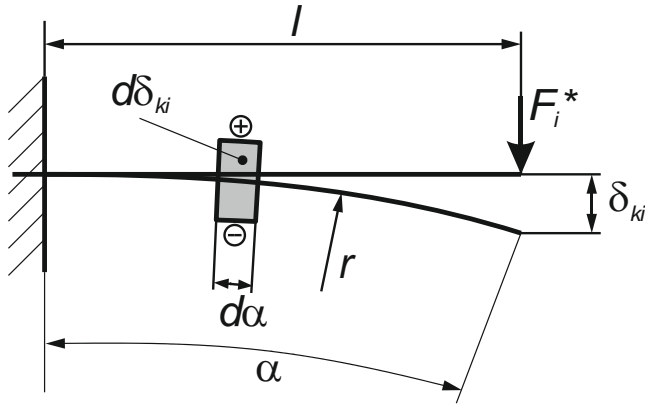
$$d\delta_{ki} = \frac{\sigma}{E} \cdot dl = \frac{F_i^*}{A \cdot E} \cdot dl$$

$$\delta_{ki} = \int_0^l \frac{F_i^*}{A \cdot E} \cdot dl = \frac{1}{E \cdot A} \int_0^l F_i^* \cdot dl$$

mit Formel: $\delta_{ki} = \frac{F_i}{F_k} \cdot \delta_{ik} \rightarrow$

$$\underline{\underline{\delta_{ik} = \frac{1}{E \cdot A \cdot F_i} \cdot \int_0^l F_k \cdot F_i^* \cdot dl = \frac{1}{E \cdot A \cdot 1} \cdot \int_0^l F_k \cdot F_i^* \cdot dl}}}$$

- Herleitung Verrückungswert für Querkraftbiegung:



$$d\alpha = \frac{d\delta_{ki}}{l} \rightarrow d\delta_{ki} = l \cdot d\alpha \leftarrow d\alpha = \frac{dl}{r}$$

$$d\delta_{ki} = l \cdot \frac{dl}{r}$$

Hooksches Gesetz für Biegung:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{F \cdot l}{E \cdot I}$$

mit Formel: $\delta_{ik} = \frac{F_k}{F_i} \cdot \delta_{ki} \rightarrow$

$$d\delta_{ik} = \frac{F_k}{F_i=1} \cdot \frac{1}{r} dl = F_k \cdot l \cdot \frac{F_i^* \cdot l}{E \cdot I} \cdot dl$$

$$d\delta_{ik} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot F_k \cdot l \cdot F_i^* \cdot l \cdot dl$$

$$\delta_{ik} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_k \cdot M_i^* \cdot dl$$

- Verrückungswert für Querkraft:

$$\delta_{ik} = \frac{1}{F_i = 1} \cdot \frac{\chi}{G \cdot A} \int_0^l F_{Qk} \cdot F_{Qi}^* \cdot dl$$

- χ - Schubverteilungszahl

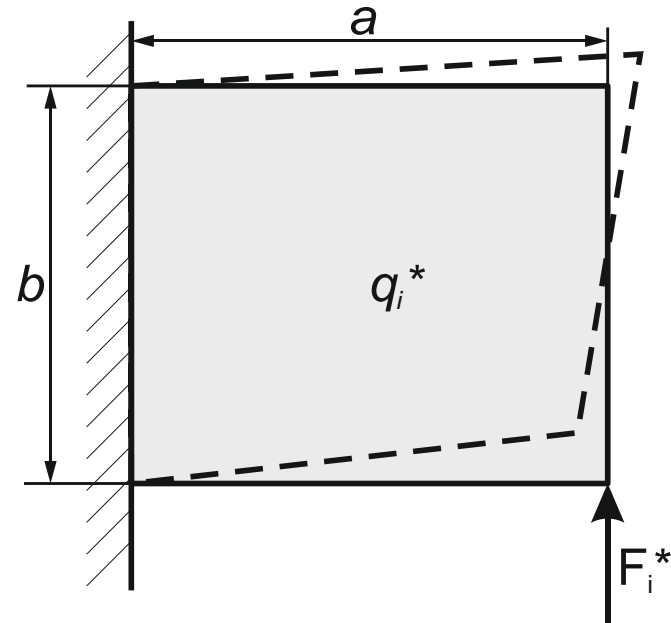
- Rechteckquerschnitt: $\chi = 1,2$
- Kreisquerschnitt: $\chi = 1,1$
- Doppel-T 100: $\chi = 2,4$
- Doppel-T 400: $\chi = 2,0$

- Verrückungswert für Schubfluss:

$$\delta_{ik} = \frac{1}{F_i = 1} \cdot \frac{1}{G \cdot s} \int_0^a \int_0^b q_k \cdot q_i^* \cdot da \cdot db$$

- q_i, q_k - Schubfluss
- s - Blechdicke

$$\chi = \frac{A(z)}{I^2(z)} \cdot \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{S_X^2(y)}{b^2(y)} dA$$

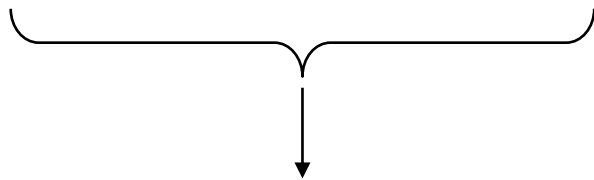


$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{E \cdot A} \int_0^l F_{Li} \cdot F_{Lk} \cdot dl \longrightarrow \text{Längskraft}$$

$$+ \sum \frac{\chi}{G \cdot A} \int_0^l F_{Qi} \cdot F_{Qk} \cdot dl \longrightarrow \text{Querkraft}$$


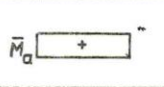
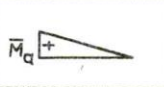
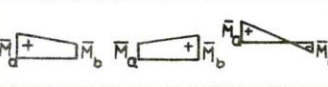
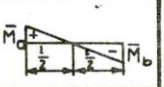
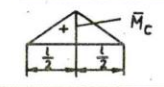
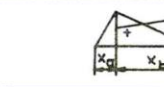
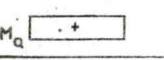
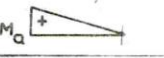
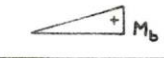
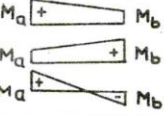

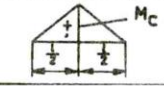


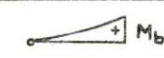



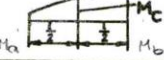
$$+ \sum \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_i \cdot M_k \cdot dl \longrightarrow \text{Querkraftbiegung}$$

$$+ \sum \int_0^a \int_0^b \frac{q_i \cdot q_k}{G \cdot s} \cdot da \cdot db \longrightarrow \text{Schubfluss}$$



Überlagerungstabellen

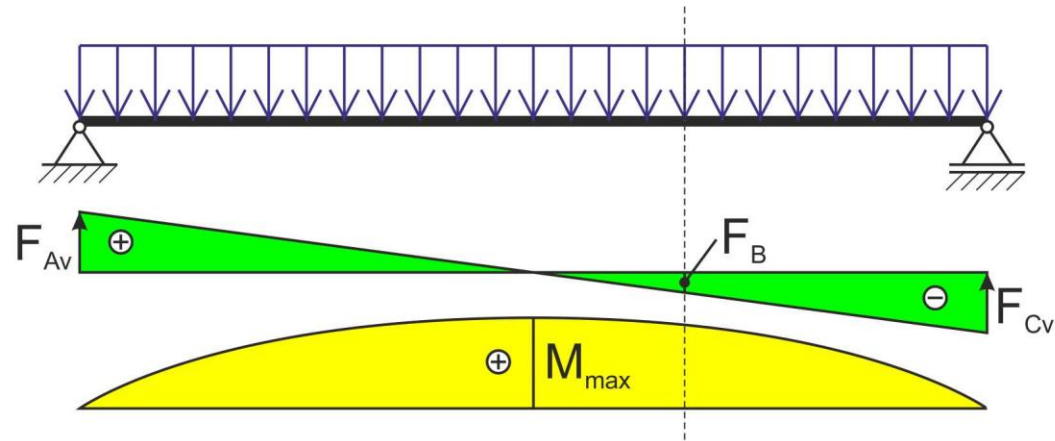
Folie Kraftgrößenverfahren – Überlagerungstabelle

						
	$M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{2} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{2} M_a (\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$	0	$\frac{1}{2} M_a \bar{M}_c l$	$\frac{1}{2} M_a \bar{M}_c l$
	$\frac{1}{2} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{4}{3} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} M_a (2\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$	$\frac{1}{6} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{4} M_a \bar{M}_c l$	$\frac{1}{6} M_a \bar{M}_c (2l - x_a)$
	$\frac{1}{2} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} M_b (2\bar{M}_b + \bar{M}_a) l$	$\frac{1}{6} M_b \bar{M}_b l$	$\frac{1}{4} M_b \bar{M}_c l$	$\frac{1}{6} M_b \bar{M}_c (l + x_b)$
	$\frac{(M_a + M_b)}{2} \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} (2M_a + M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} [M_a (2\bar{M}_a + \bar{M}_b) + M_b (2\bar{M}_b + \bar{M}_a)] \cdot l$	$\frac{1}{6} (M_a - M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{4} (M_a + M_b) \bar{M}_c l$	$\frac{1}{6} \bar{M}_c [M_a (1 + \frac{x_b}{l}) + M_b (1 + \frac{x_a}{l})] l$
	0	$\frac{1}{6} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} M_a (\bar{M}_a - \bar{M}_b) l$	$\frac{1}{3} M_b \bar{M}_a l$	0	$\frac{1}{3} M_a \bar{M}_c (\frac{l}{2} - x_a)$
	$\frac{1}{2} M_c \bar{M}_a l$	$\frac{1}{4} M_c \bar{M}_a l$	$\frac{1}{4} M_c (\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$	0	$\frac{1}{3} M_c \bar{M}_c l$ allg. f. $x_a = \bar{x}_a$	$\frac{1}{12} M_c \bar{M}_c \frac{3l^2 - 4x_a^2}{x_b}$ f. $\bar{x}_a < \frac{l}{2}$
	$\frac{1}{2} M_c \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} M_c \bar{M}_a (2l - x_a)$	$\frac{1}{6} M_c [\bar{M}_a (1 + \frac{x_b}{l}) + \bar{M}_b (1 + \frac{x_a}{l})] l$	$\frac{1}{3} M_c \bar{M}_a (\frac{l}{2} - x_a)$	$\frac{1}{12} M_c \bar{M}_c \frac{3l^2 - 4x_a^2}{x_b}$ f. $x_a < \frac{l}{2}$	$\frac{1}{6} M_c \bar{M}_c [2 - \frac{(x_b - x_a)^2}{x_b \cdot x_a}] l$ f. $\bar{x}_a < x_a$ $\frac{1}{6} M_c \bar{M}_c [2 - \frac{(x_a - x_a)^2}{x_a \cdot x_b}] l$ f. $x_a > x_a$
	$\frac{1}{3} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{4} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{12} M_a (3\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$	$\frac{1}{6} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{7}{48} M_a \bar{M}_c l$	$\frac{1}{12} M_a \bar{M}_c (1 + \frac{x_a}{l} + \frac{x_b^2}{l^2}) l$
	$\frac{1}{3} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{12} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{12} M_b (3\bar{M}_b + \bar{M}_a) l$	$\frac{1}{6} M_b \bar{M}_b l$	$\frac{7}{48} M_b \bar{M}_c l$	$\frac{1}{12} M_b \bar{M}_c (1 + \frac{x_b}{l} + \frac{x_a^2}{l^2}) l$
	$\frac{2}{3} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{5}{12} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{12} M_a (5\bar{M}_a + 3\bar{M}_b) l$	$\frac{1}{6} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{17}{48} M_a \bar{M}_c l$	$\frac{1}{12} M_a \bar{M}_c (5 - \frac{x_a}{l} - \frac{x_a^2}{l^2}) l$
	$\frac{2}{3} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{4} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{12} M_b (5\bar{M}_b + 3\bar{M}_a) l$	$\frac{1}{6} M_b \bar{M}_b l$	$\frac{17}{48} M_b \bar{M}_c l$	$\frac{1}{12} M_b \bar{M}_c (5 - \frac{x_b}{l} - \frac{x_b^2}{l^2}) l$
	$\frac{2}{3} M_c \bar{M}_a l$	$\frac{1}{3} M_c \bar{M}_a l$	$\frac{1}{3} M_c (\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$	0	$\frac{5}{12} M_c \bar{M}_c l$	$\frac{1}{3} M_c \bar{M}_c (1 + \frac{x_a}{l} - \frac{x_a}{l^2}) l$
	$\frac{1}{6} (M_a + 4M_c + M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} (M_a + 2M_c) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} [M_a \bar{M}_a + 2M_c (\bar{M}_a + \bar{M}_b) + M_b \bar{M}_b] l$	$\frac{1}{6} (M_a - M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{24} M_c (M_a + M_b + 10M_c) l$	$\frac{1}{6} \bar{M}_c [M_a \frac{x_a^2}{l^2} + M_b \frac{x_b^2}{l^2} + 2M_c (1 + \frac{x_a}{l} - \frac{x_a^2}{l^2})] l$

Folie Kraftgrößenverfahren – Bsp. Schnittgrößenverläufe 0- u. 1-System

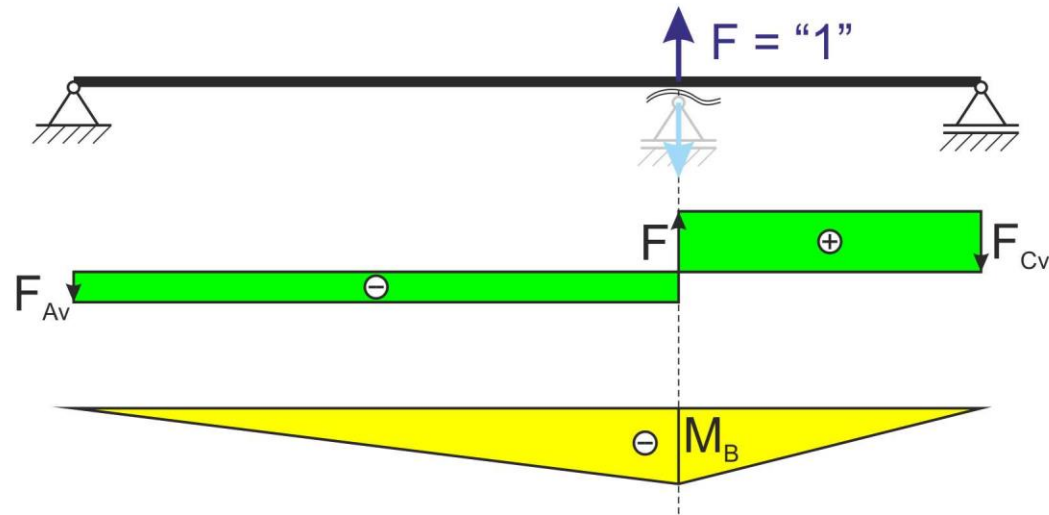
0-System:

(statisch bestimmt,
äußere Belastung)



1-System:

(statisch bestimmt,
1. innere „virtuelle“ Belastung)



- δ_{10} :
$$\delta_{10} = \sum \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_1 \cdot M_0 \cdot dl + \sum \frac{\chi}{G \cdot A} \int_0^l F_{Q1} \cdot F_{Q0} \cdot dl$$

– Nutzung der Überlagerungstabellen:

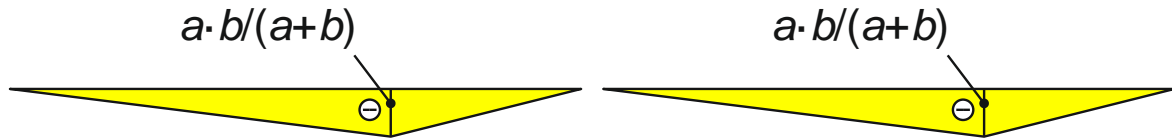
$$\delta_{10} = \frac{1}{(E \cdot I)} \cdot \int \left[\begin{array}{l} \text{Parabola: } q \cdot (a+b)^2 / 8 \\ \text{Triangle: } a \cdot b / (a+b) \end{array} \right] \cdot d(a+b) +$$

$$\frac{\chi}{(G \cdot A)} \cdot \int \left[\begin{array}{l} \text{Triangle: } q \cdot (a+b) / 2 \\ \text{Triangle: } q \cdot (a-b) / 2 \\ \text{Rectangle: } b / (a+b) \end{array} \right] \cdot da +$$

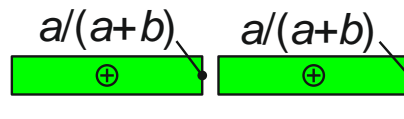
$$\frac{\chi}{(G \cdot A)} \cdot \int \left[\begin{array}{l} \text{Triangle: } q \cdot (a+b) / 2 \\ \text{Triangle: } q \cdot (a-b) / 2 \\ \text{Rectangle: } a / (a+b) \end{array} \right] \cdot db$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-q \cdot (a+b)^3}{8} \cdot \left(1 + \frac{a}{(a+b)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \right) + \frac{\chi}{G \cdot A} \cdot q \cdot (-a \cdot b - a^2)$$

- δ_{11} :

$$\delta_{11} = 1/(E \cdot I) \cdot \int \left[\text{diagram} \right] \cdot d(a+b) +$$


$$\chi/(G \cdot A) \cdot \int \left[\text{diagram} \right] \cdot da +$$


$$\chi/(G \cdot A) \cdot \int \left[\text{diagram} \right] \cdot db$$


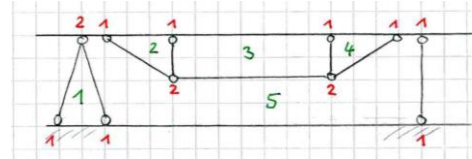
$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{(a+b)} + \frac{\chi}{G \cdot A} \cdot \left(\frac{b^2}{(a+b)} + \frac{a^2}{(a+b)} \right)$$

Folie Kraftgrößenverfahren – Berechnungstabelle (Ausschnitt Übung Schubfeld)

Bemerkungen	Stab, Stellen, Feld	l [m] bzw. a,b [m]	I [m ⁴] A [m ²] s [m]	Feld i		Feld k		Berechnung	Ergebnis [m]
				Bild	Anfang Mitte Ende	Bild	Anfang Mitte Ende		
	11 M → 6	0,175	1,57E-2		-0,535		-0,535	$-0,535 \times -0,535 \times 0,175 / 1,57E-02 / E$	1,5162E-8
	12 6 → 7	0,7	1,11E-2		-0,535		-0,535	$-0,535 \times -0,535 \times 0,700 / 1,11E-02 / E$	8,5922E-8
	13 7 → 8	0,535	1,04E-2		-0,535 -		-0,535 -	$-0,535 \times -0,535 \times 0,535 / 3 / 1,04E-02 / E$	2,3408E-8
M	11 M → 6	0,175	3,68E-4		2,878		2,878	$2,878 \times 2,878 \times 0,175 / 3,68E-04 / E$	1,8751E-5
	12 6 → 7	0,7	2,70E-4		2,878 -		2,878 -	$[2,9 \times (2 \times 2,878 + 1,247) + 1,2 \times (2 \times 1,247 + 2,878 \times 0,700)] / 6 / 2,7E-04 / E$	5,5202E-5
	13 7 → 8	0,535	2,47E-4		1,2465 -		1,2465 -	$1,247 \times 1,247 \times 0,535 / 3 / 2,47E-04 / E$	5,3449E-6
Schub	1	0,65 0,70	6,00E-3	-	3,5846	-	3,5846	$3,585 \times 3,585 \times 0,650 \times 0,700 / 6,00E-03 / G$	1,2179E-5
	3	2,33 0,54	2,50E-3	-	1	-	1	$1,000 \times 1,000 \times 2,330 \times 0,535 / 2,50E-03 / G$	6,2320E-6
Summe									1,4011E-4

Folie Kraftgrößenverfahren – Vorgehensweise

1. Ermittlung statische Unbestimmtheit

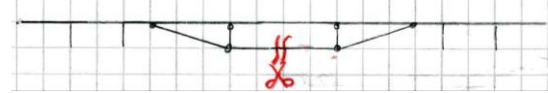


$$U = 3 \cdot 5 - 14$$

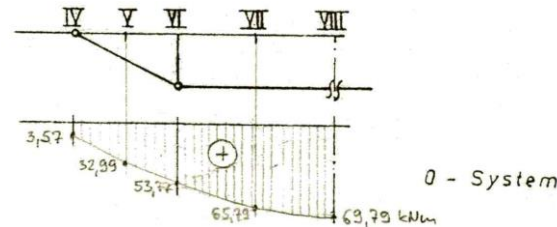
$$U = 1 \rightarrow$$

1-fach statisch unbestimmt

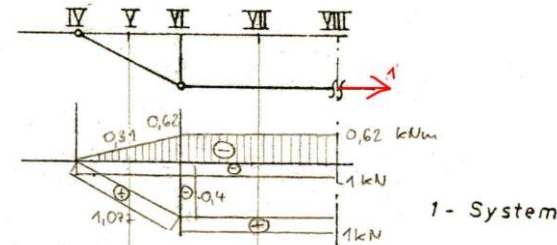
2. Herstellung statisch bestimmtes System
→ Schnitte, Einführung Gelenke, Entfernen Auflager



3. Berechnung Beanspruchungsverläufe 0-System
→ statisch bestimmt + äußere Belastung



4. Berechnung Beanspruchungsverläufe in allen virtuellen Systemen (1- ... n-System)
→ statisch bestimmt + je eine virtuelle Belastung



5. Gesamtverrückungswerte berechnen
→ Überlagerung der Einzelsysteme

$$E \cdot \delta_{10} = \frac{1}{J} \int_0^L \frac{M_0}{x} \cdot \frac{M_1}{x} \cdot 2 dx + \frac{1}{J} \int_0^L \frac{M_0}{x} \cdot \frac{M_2}{x} \cdot 2 dx$$

6. Ansatz Kompatibilitätsbedingung zur Berechnung der Vervielfachungsfaktoren

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot x_n = \phi$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot x_n = \phi$$

$$\vdots$$

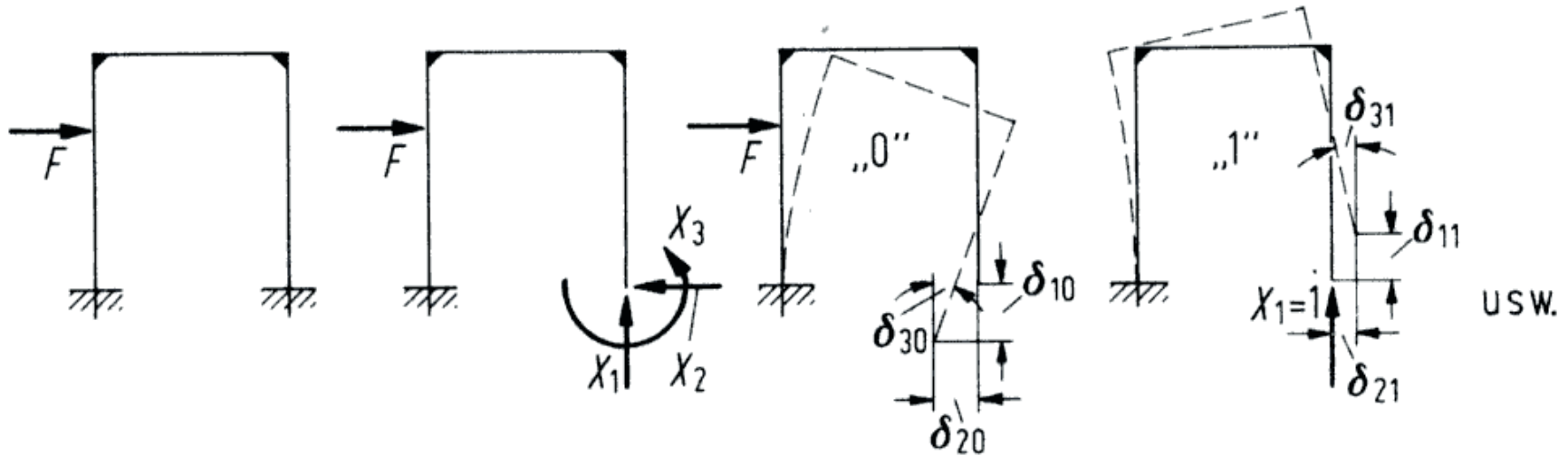
$$\delta_{n0} + \delta_{n1} \cdot x_1 + \delta_{n2} \cdot x_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot x_n = \phi$$

7. Berechnung der tatsächlichen Beanspruchungsverläufe

$$F = F_0 + F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + \dots + F_n \cdot x_n$$

$$M = M_0 + M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2 + \dots + M_n \cdot x_n$$

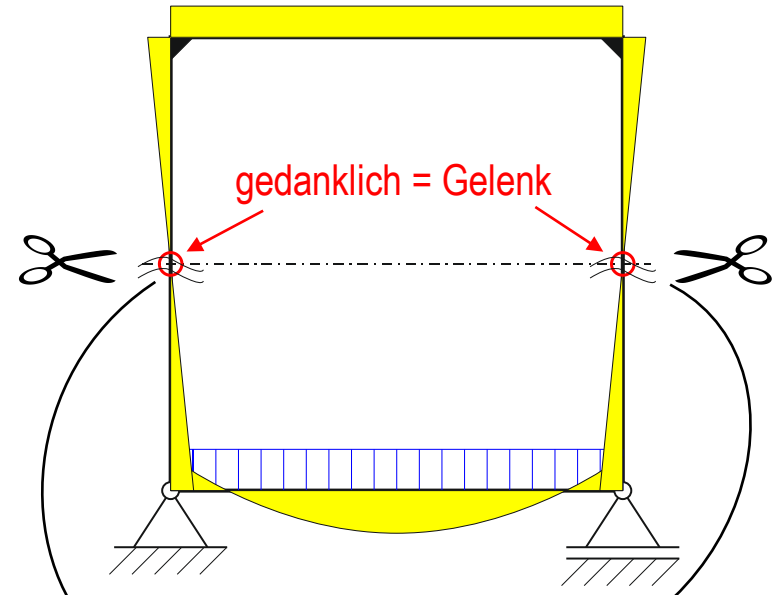
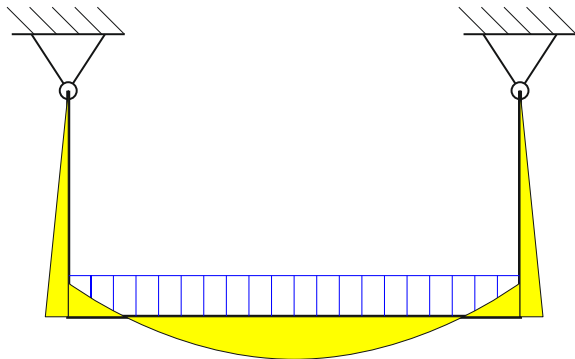
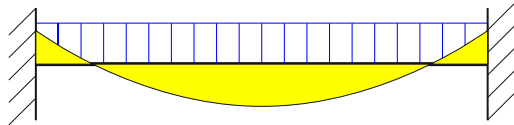
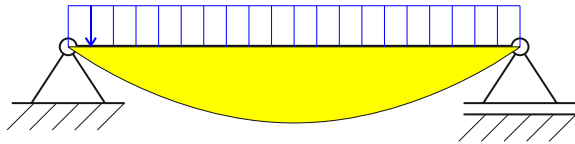
Folie Kraftgrößenverfahren – Bsp. mit höherer statischer Unbestimmtheit



$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{E \cdot A} \int_0^l F_{Li} \cdot F_{Lk} \cdot dl + \sum \frac{\chi}{G \cdot A} \int_0^l F_{Qi} \cdot F_{Qk} \cdot dl + \sum \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_i \cdot M_k \cdot dl + \sum \int_0^a \int_0^b \frac{q_i \cdot q_k}{G \cdot s} \cdot da \cdot db$$

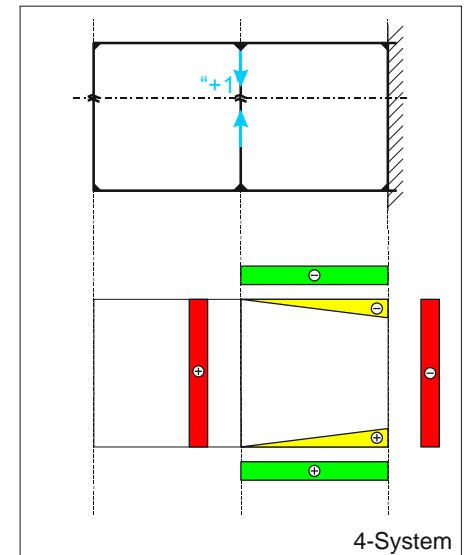
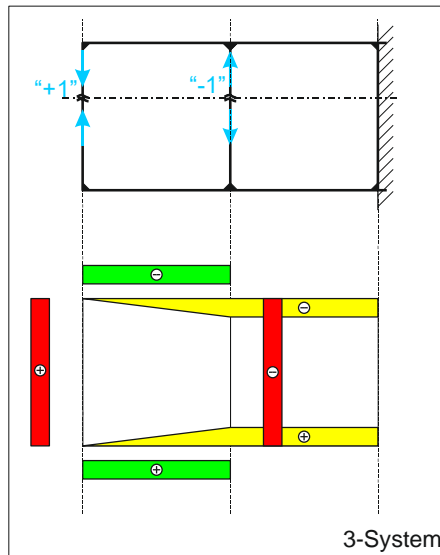
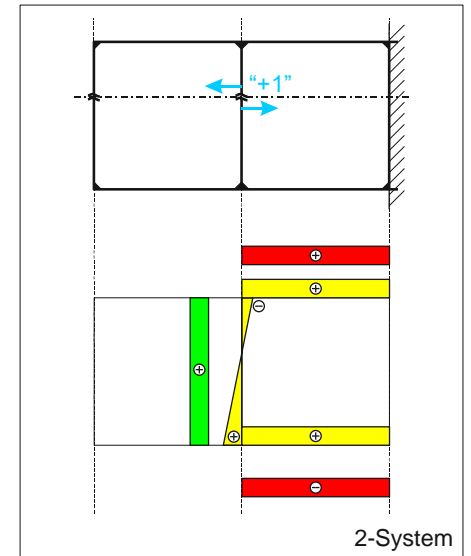
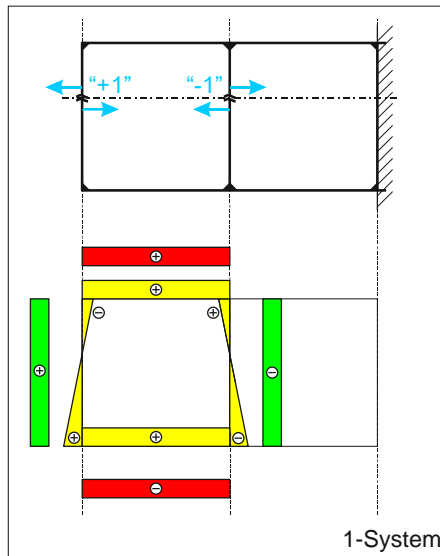
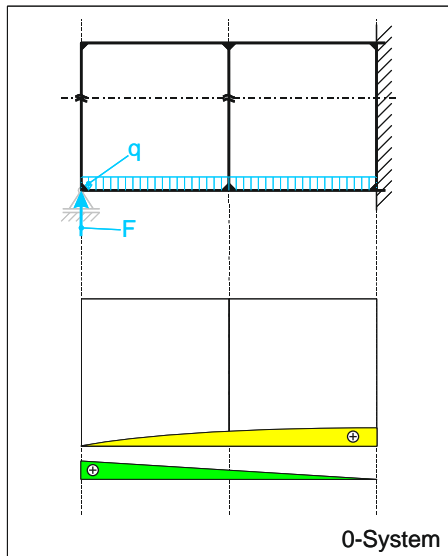
(Quelle: Dubbel)

Folie Schnitt im Biegelinienwendepunkt



Biegelinienwendepunkt
= Nulldurchgang Momentenverlauf
= keine Momente

Folie Kraftgrößenverfahren – Bsp. Wagenkasten – alle Systeme



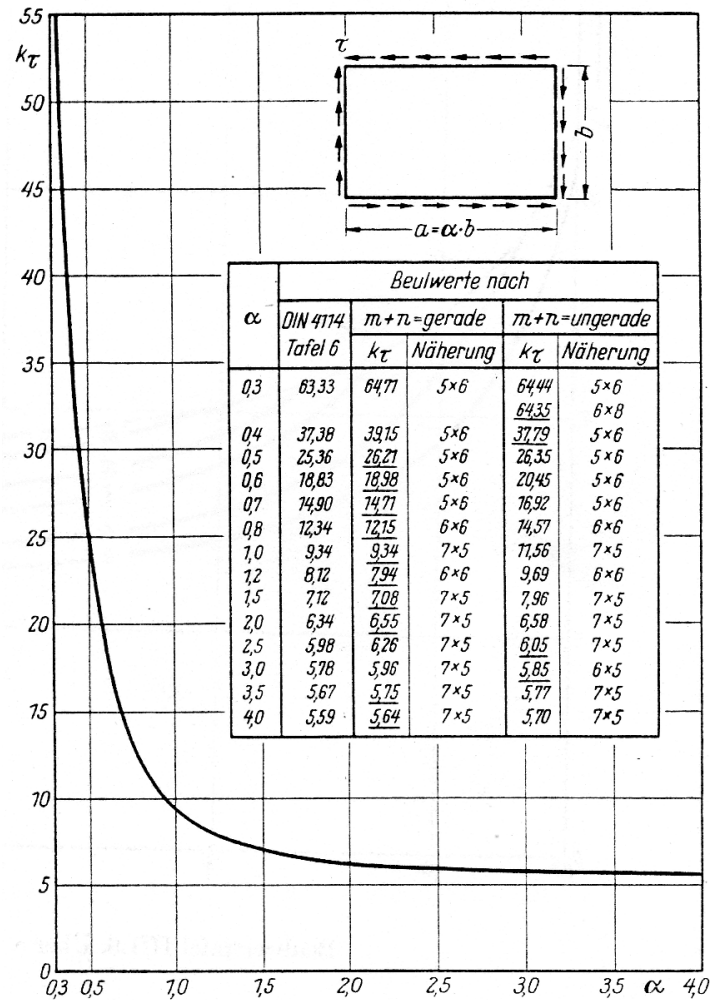
Moment
 Querkraft
 Längskraft

Folie Kraftgrößenverfahren – Bsp. Wagenkasten – Verrückungswerte

		δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	$\delta_{21}=\delta_{12}$	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	$\delta_{31}=\delta_{13}$	$\delta_{32}=\delta_{23}$	δ_{33}	δ_{34}	$\delta_{41}=\delta_{14}$	$\delta_{42}=\delta_{24}$	$\delta_{43}=\delta_{34}$	δ_{44}
0-System	Oben																				
	Seiten																				
	Unten	x	x	x x	x x																
1-System	Oben					xx xx		x													
	Seiten					xx xx	x x		0												
	Unten	x				xx xx		x													
2-System	Oben										xx xx	x	x								
	Seiten						x x				xx xx										
	Unten		x								xx xx	x	x								
3-System	Oben							x				x				xx xx	x				
	Seiten															xx	x				
	Unten			x x				x				x				xx xx	x				
4-System	Oben								0				x				x				xx xx
	Seiten																x				xx
	Unten				x x								x				x				xx xx

Folie Nachweis Schubbeulen nach DIN EN 1993-1-5

Nachweis	
$\eta_3 = \frac{V_{Ed}}{V_{b,Rd}} \leq 1,0 \quad (\text{Formel 5.10})$	
Beanspruchung	Beanspruchbarkeit
<p>Schubfluss: $q = \frac{V_{Ed}}{h_w} \rightarrow V_{Ed} = q \cdot h_w$</p>	$V_{b,Rd} = V_{bw,Rd} + V_{bf,Rd} \leq \frac{\eta \cdot f_{yw} \cdot h_w \cdot t}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M1}} \quad (\text{Formel 5.1})$ <p>Annahme: nur Steg: $V_{bf,Rd} = 0 \rightarrow V_{b,Rd} = V_{bw,Rd} \leq \frac{\eta \cdot f_{yw} \cdot h_w \cdot t}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M1}}$</p>
	<p>Beitrag des Steges zum Bemessungswert der Beanspruchbarkeit:</p> $V_{bw,Rd} = \frac{\chi_w \cdot f_{yw} \cdot h_w \cdot t}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M1}} \quad (\text{Formel 5.2})$
	<p>Beitrag des Steges zur Schubbeanspruchbarkeit:</p> $\chi_w = \eta (= 1,0) \text{ oder } \frac{0,83}{\lambda_w} \quad (\text{Bild 5.1 \& Tabelle 5.1})$
	<p>Modifizierte Schlankheit:</p> $\bar{\lambda}_w = 0,76 \cdot \sqrt{\frac{f_{yw}}{\tau_{cr}}} \quad (\text{Formel 5.3})$
	<p>Kritische Beulspannung:</p> $\tau_{cr} = k_\tau \cdot \sigma_E \quad (\text{Formel 5.4})$
	<p>Eulersche Knickspannung:</p> $\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t^2}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot b^2} = 190.000 \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad [\text{MPa}] \quad (\text{Anhang A})$

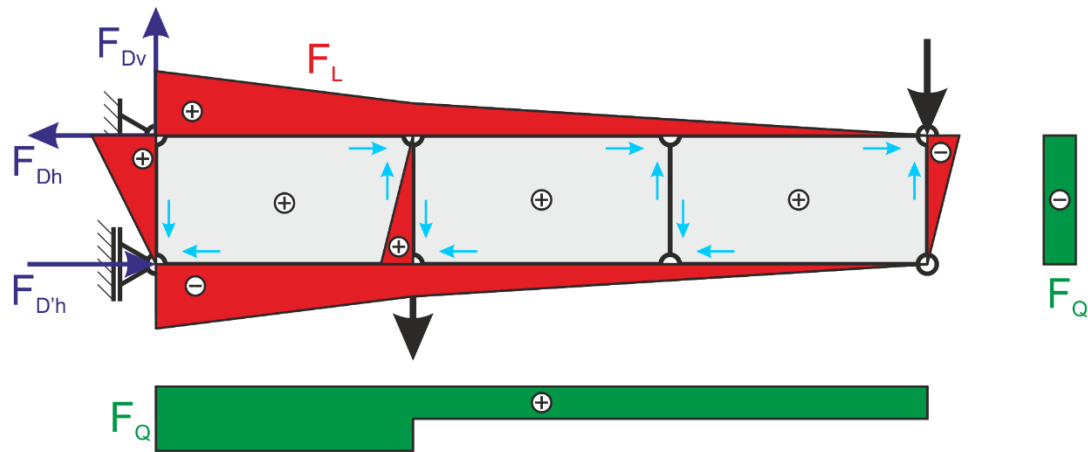
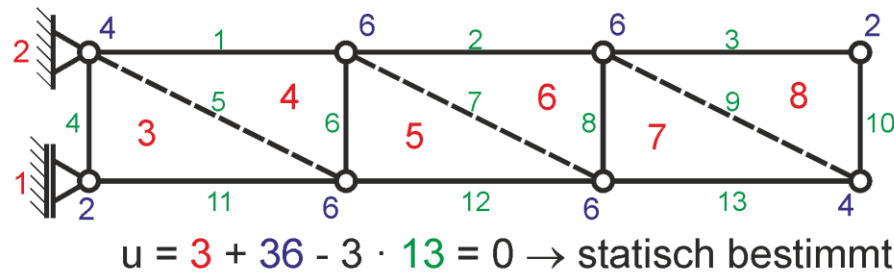
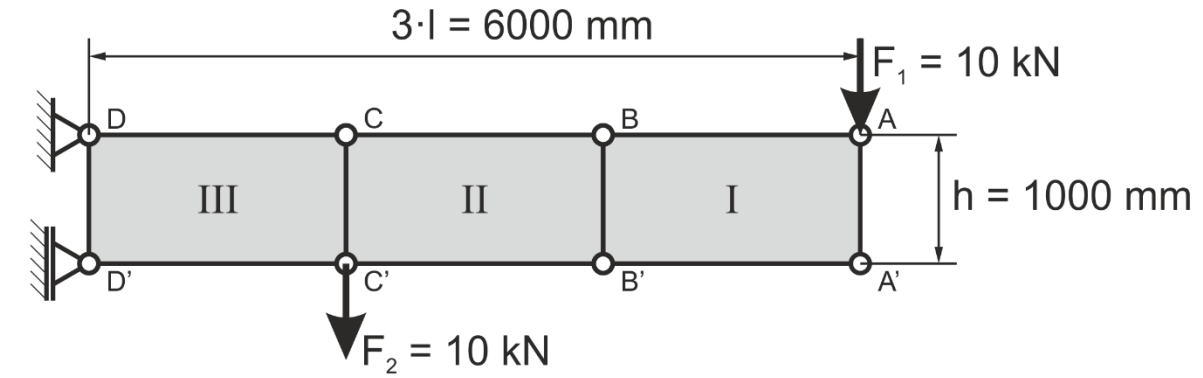


Beulwerttafel I/3.

Über α aufgetragene Beulwerte k_τ

(Quelle: Klöppel/Scheer)

Folie Rechteckige Schubfeldträger – Bsp. 2



- Längskräfte (I):

$$\sum V = 0 = F_{Dv} - F_1 - F_2 \longrightarrow \underline{F_{Dv} = F_1 + F_2 = 20 \text{ kN}}$$

$$\sum H = 0 = F_{D'h} - F_{Dh} \longrightarrow F_{Dh} = F_{D'h}$$

$$\sum M_D = 0 = F_{D'h} \cdot h - F_1 \cdot 3 \cdot l - F_2 \cdot l \longrightarrow \underline{F_{D'h} = F_{Dh} = \frac{F_1 \cdot 3 \cdot l + F_2 \cdot l}{h} = 80 \text{ kN}}$$

- Schubflüsse:

$$\underline{q_I = q_{II} = \frac{F_1}{h} = \frac{10 \text{ kN}}{1.000 \text{ mm}} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$

$$\underline{q_{III} = \frac{F_{Dv}}{h} = \frac{20 \text{ kN}}{1.000 \text{ mm}} = 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$

- Längskräfte (II):

$$\underline{F_{Bh} = -F_{B'h} = q_I \cdot l = 10 \cdot 2.000 \text{ N} = 20 \text{ kN}}$$

$$\underline{F_{Ch} = -F_{C'h} = q_I \cdot l + q_{II} \cdot l = 10 \cdot 2.000 \cdot \text{N} + 10 \cdot 2.000 \cdot \text{N} = 40 \text{ kN}}$$

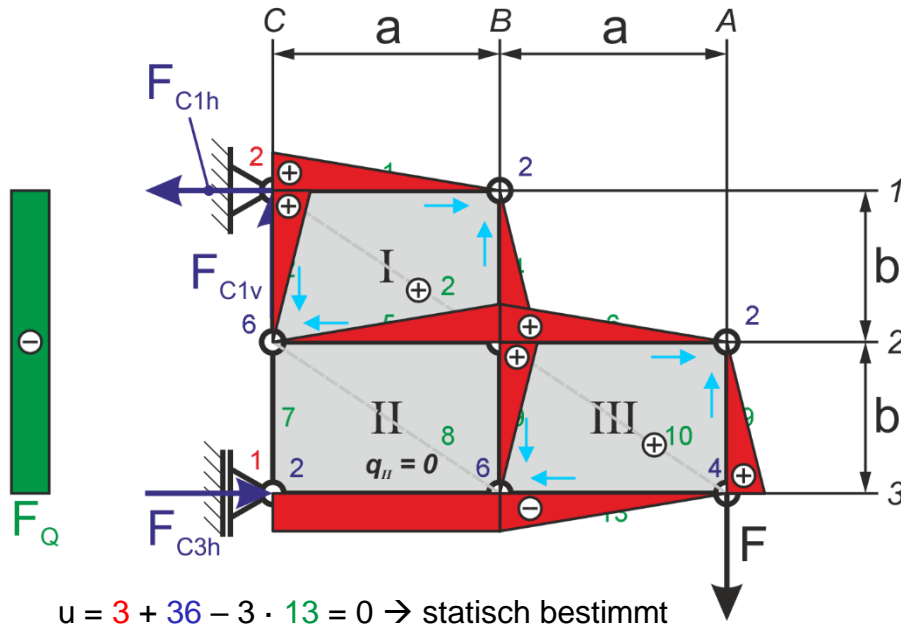
- Querkräfte:

$$\underline{F_{Q,A-B} = F_{Q,B-C} = F_1 = 10 \text{ kN}}$$

$$\underline{F_{Q,C-D} = F_1 + F_2 = 20 \text{ kN}}$$

$$\underline{F_{Q,D-D'} = F_{Dh} = 80 \text{ kN}}$$

Folie Rechteckige Schubfeldträger – Bsp. 3



$$\underline{\underline{q_{III} = \frac{F}{b}}}$$

$$q_{II} = 0$$

$$\underline{\underline{q_I = \frac{F/b \cdot a}{a} = \frac{F}{b}}}$$

$q_I = q_{III}$

$$\uparrow \sum V = 0 = F_{C1v} - F \longrightarrow \underline{\underline{F_{C1v} = F}}$$

$$\rightarrow \sum H = 0 = F_{C3h} - F_{C1h} \longrightarrow F_{C1h} = F_{C3h}$$

$$\curvearrowleft \sum M_{C1} = 0 = F_{C3h} \cdot 2 \cdot b - F \cdot 2 \cdot a$$

$$\underline{\underline{F_{C3h} = F_{C1h} = F \cdot \frac{a}{b}}}$$

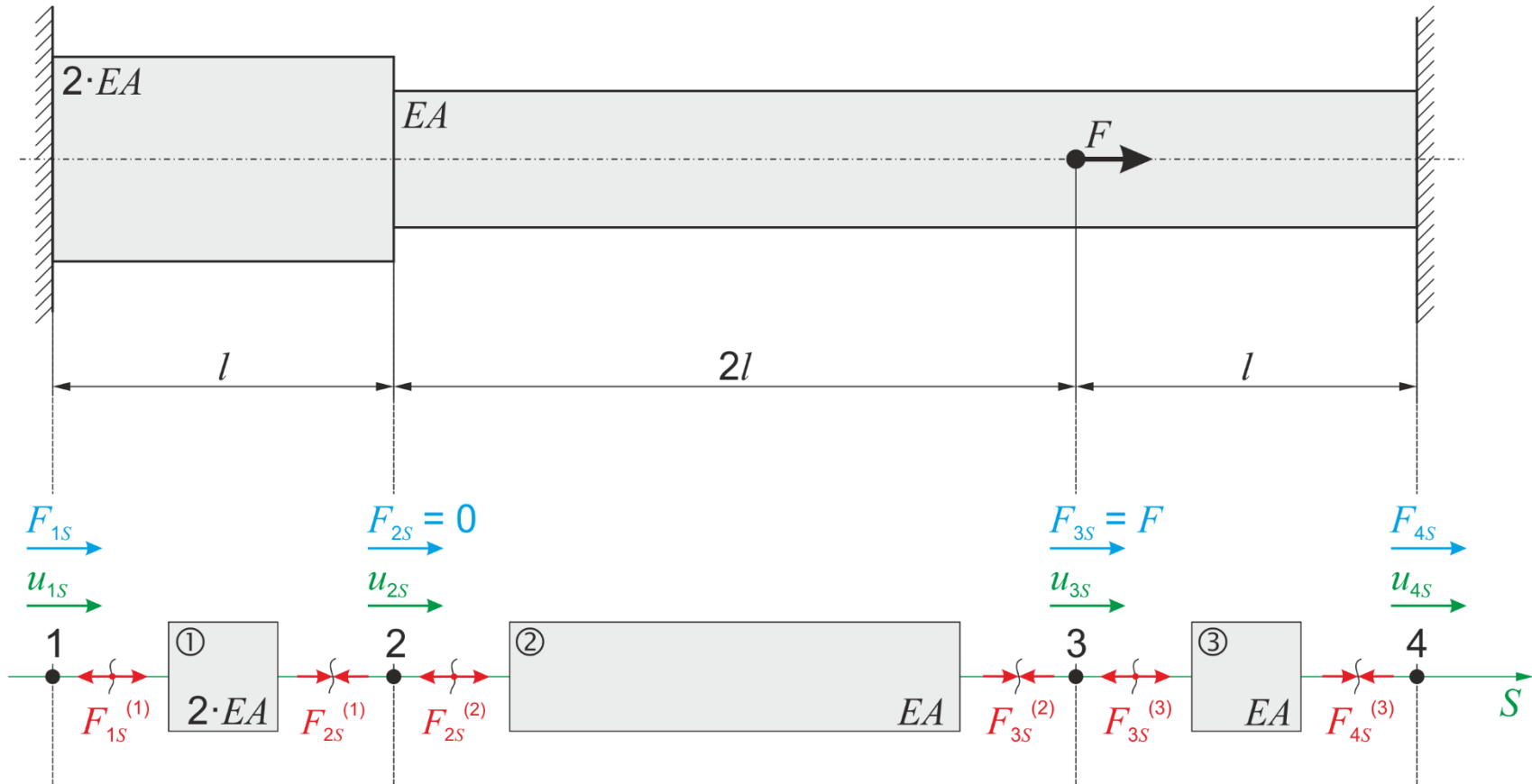
$$F_{A3v} = F$$

$$F_{B2v} = q_I \cdot b = \frac{F}{b} \cdot b = F$$

$$F_{B3h} = q_I \cdot a = \frac{F}{b} \cdot a = (-)F \cdot \frac{a}{b}$$

$$F_{B2h} = q_I \cdot a = F \cdot \frac{a}{b}$$

Folie FEM: Schritt 1: Zerlegung in finite Elemente am Bsp.

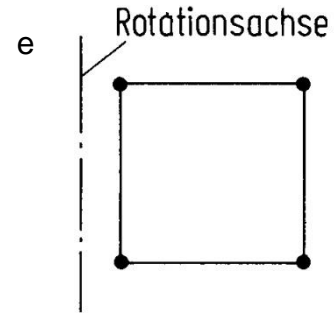
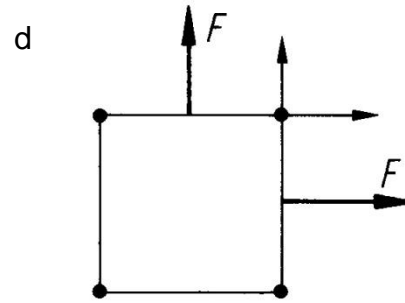
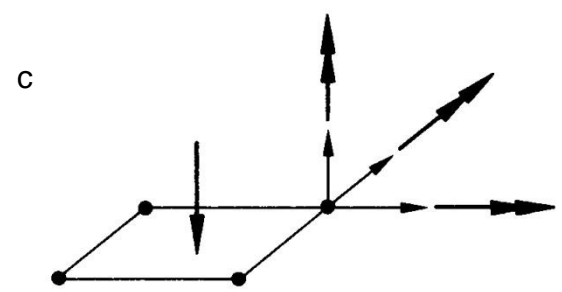
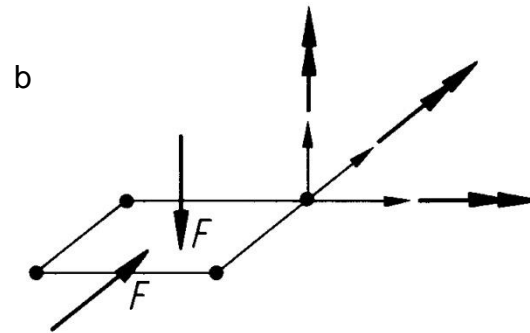
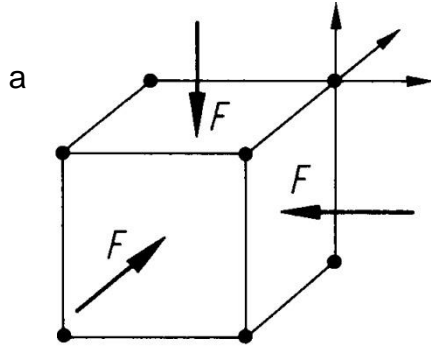


F_{1s}, F_{2s}, \dots - Äußere Knotenkräfte (Belastungskräfte)

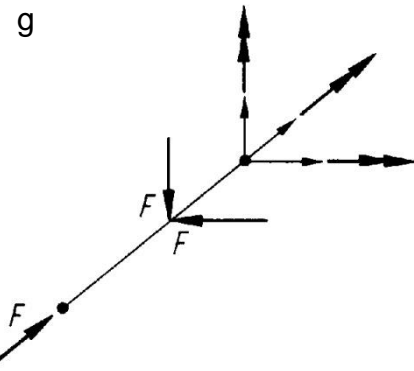
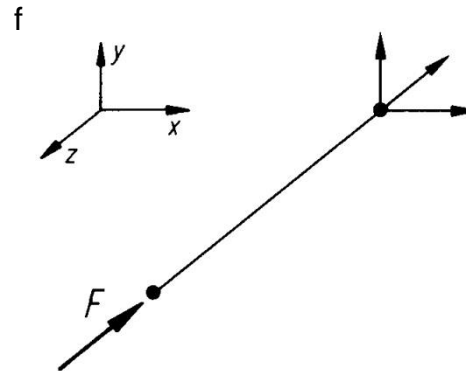
$F_{1s}^{(1)}, F_{2s}^{(1)}, \dots$ - Innere Knotenkräfte

u_{1s}, u_{2s}, \dots - Knotenverschiebungen

Folie FEM: Standardelemente

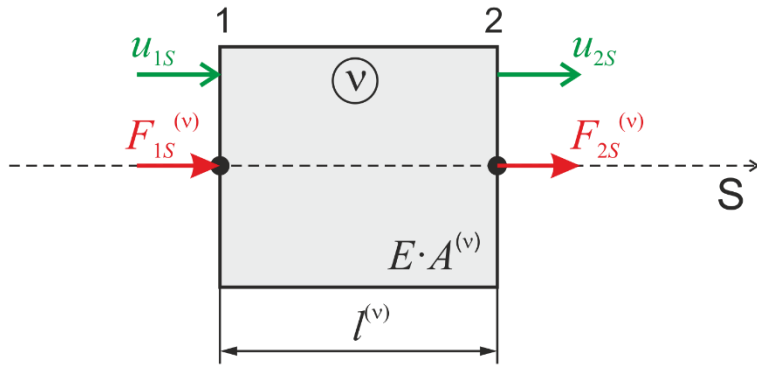


- a 3D-Element
 - b Schalenelement
 - c Plattenelement
 - d Scheibenelement
 - e Axialsymmetrisches Element
 - f Stabelement
 - g Balkenelement
- Freiheitsgrade:
- Translation
 - ↻ Rotation



(Quelle: Dubbels)

Folie FEM: Stabelement – einachsiger Spannungszustand



- $l^{(v)}$ - Länge Element v
- $E \cdot A^{(v)}$ - Dehnsteifigkeit Element v
- u_{1S}, u_{2S} - Verschiebungen in Richtung der Achse S
- $F_{1S}^{(v)}, F_{2S}^{(v)}$ - innere Knotenkräfte am Element v

Knotenkraft $F_{2S}^{(v)} = f(u)$:

$$\sigma^{(v)} = \frac{F_{2S}^{(v)}}{A^{(v)}} \rightarrow F_{2S}^{(v)} = \sigma^{(v)} \cdot A^{(v)}$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

$$F_{2S}^{(v)} = \varepsilon^{(v)} \cdot E^{(v)} \cdot A^{(v)} = \varepsilon^{(v)} \cdot (E \cdot A)^{(v)}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$F_{2S}^{(v)} = \frac{(\Delta l)^{(v)}}{l^{(v)}} \cdot (E \cdot A)^{(v)}$$

$$\Delta l = u_{2S} - u_{1S}$$

$$F_{2S}^{(v)} = -\frac{(E \cdot A)^{(v)}}{l^{(v)}} \cdot (u_{2S} - u_{1S})$$

Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_S = 0 = F_{1S}^{(v)} + F_{2S}^{(v)}$$

Knotenkraft $F_{1S}^{(v)} = f(u)$:

$$F_{1S}^{(v)} = -F_{2S}^{(v)} = \frac{(E \cdot A)^{(v)}}{l^{(v)}} \cdot (u_{2S} - u_{1S})$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} F_{1S} \\ F_{2S} \end{pmatrix}^{(v)} = \begin{pmatrix} u_{1S} \\ u_{2S} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(E \cdot A)}{l} & -\frac{(E \cdot A)}{l} \\ -\frac{(E \cdot A)}{l} & \frac{(E \cdot A)}{l} \end{bmatrix}^{(v)}$$

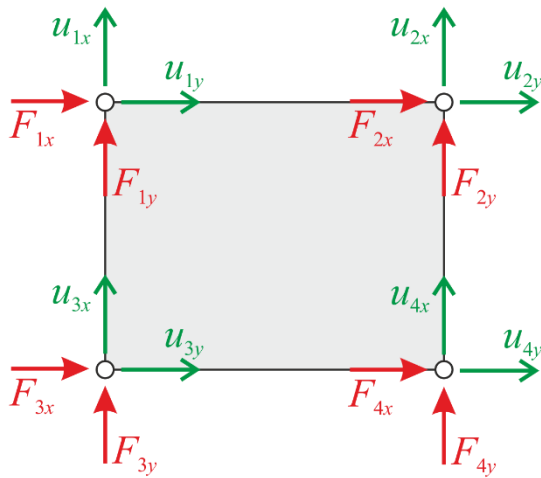
Lastvektor

Verschiebungs-
vektor

Steifigkeits-
matrix

$$F^{(v)} = u^{(v)} \cdot K^{(v)} \leftarrow \text{Gleichungssystem Element}$$

Folie FEM: Rechteckelement



$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix}$$

Streifigkeitsmatrix für Rechteck: 8 x 8
 → symmetrisch: $k_{ij}=k_{ji}$

Folie FEM: Element-Steifigkeitsmatrizen / Knotenkräfte Bsp.

Koinzidenztabelle

Element-Knoten-Nr.	System-Knoten-Nr.		
	①	②	③
1	1	2	3
2	2	3	4

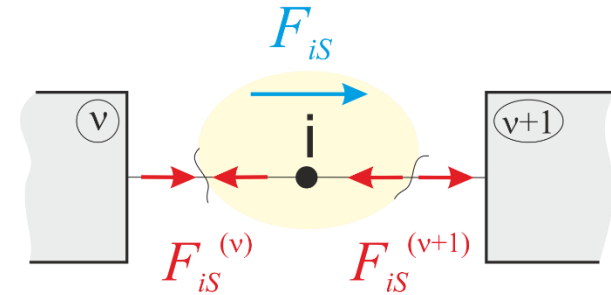
Element-Steifigkeitsmatrizen

$$\begin{pmatrix} F_{1S} \\ F_{2S} \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1S} \\ u_{2S} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & -\frac{2EA}{l} \\ -\frac{2EA}{l} & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} F_{2S} \\ F_{3S} \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_{2S} \\ u_{3S} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} \\ -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} \end{bmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} F_{3S} \\ F_{4S} \end{pmatrix}^{(3)} = \begin{pmatrix} u_{3S} \\ u_{4S} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^{(3)}$$

Kräfte an Knoten:



$$F_{iS} - F_{iS}^{(v)} - F_{iS}^{(v+1)} = 0$$

$$F_{iS} = F_{iS}^{(v)} + F_{iS}^{(v+1)}$$

$$\begin{aligned} i=1: & F_{1S}^{(1)} = F_{1S} \\ i=2: & F_{2S}^{(1)} + F_{1S}^{(2)} = F_{2S} \\ i=3: & F_{2S}^{(2)} + F_{1S}^{(3)} = F_{3S} \\ i=4: & F_{2S}^{(3)} = F_{4S} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} F_{1S} \\ F_{2S} \\ F_{3S} \\ F_{4S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1S} \\ u_{2S} \\ u_{3S} \\ u_{4S} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cccc}
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & &
 \end{array} \right]$$

Element 1
Element 2
Element 3

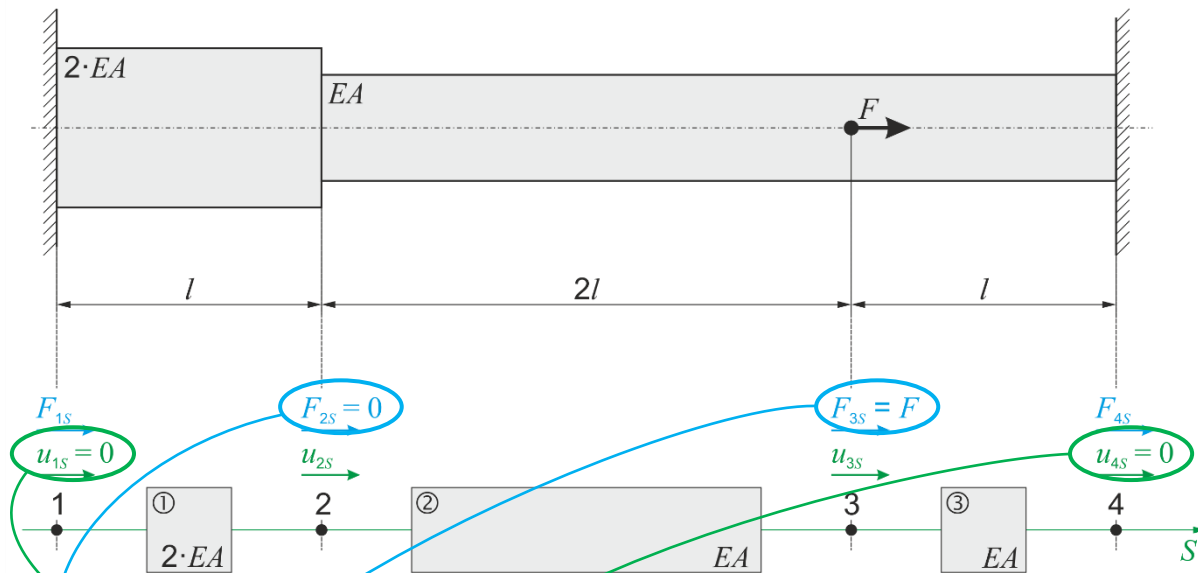
Gesamt-Steifigkeitsmatrix K

Systemknoten-Vektor o. Knotenverschiebungsvektor u

Knotenkräfte-Vektor F

Folie FEM: Schritt 2: Antragen Randbedingungen & Lasten am Bsp.

Äußere Belastungen
Randbedingungen




$$\begin{pmatrix} F_{1s} \\ 0 \\ F \\ F_{4s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{2s} \\ u_{3s} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{2l}$$

Folie FEM: Schritt 4: Berechnung abgeleitete Größen Bsp.

Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} F_{1S} \\ 0 \\ F \\ F_{4S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{2S} \\ u_{3S} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{2l}$$


Falk-Schema:


$$\begin{pmatrix} 0 & u_{2S} & u_{3S} & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{2l} \\ \left(F_{1S} \quad 0 \quad F \quad F_{4S} \right) \end{array} \right)$$

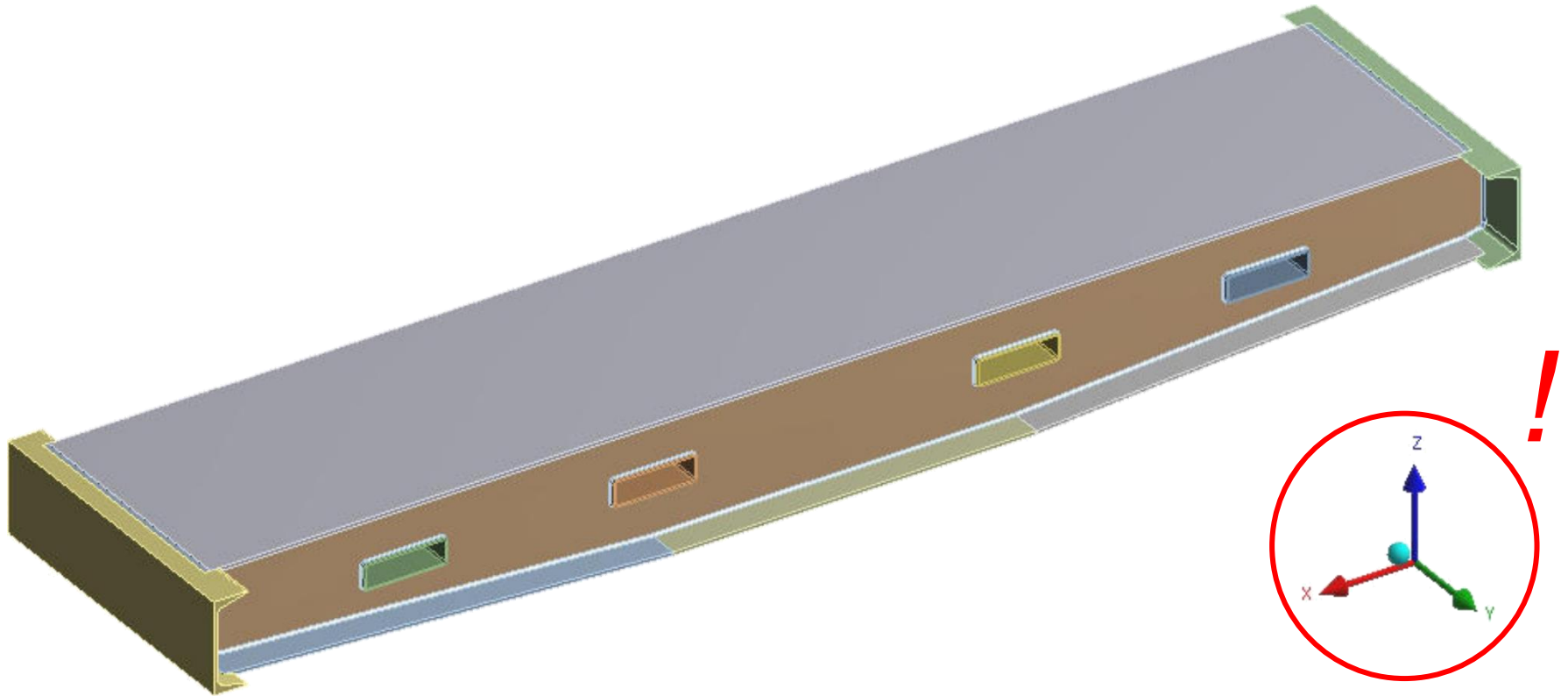
Kräfte F_{1S} , F_{4S} in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} F_{1S} \\ F_{4S} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{2l} \cdot \begin{pmatrix} u_{2S} \\ u_{3S} \end{pmatrix} = \underline{\underline{-\frac{F}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

Kräfte F_{1S} , F_{4S} :

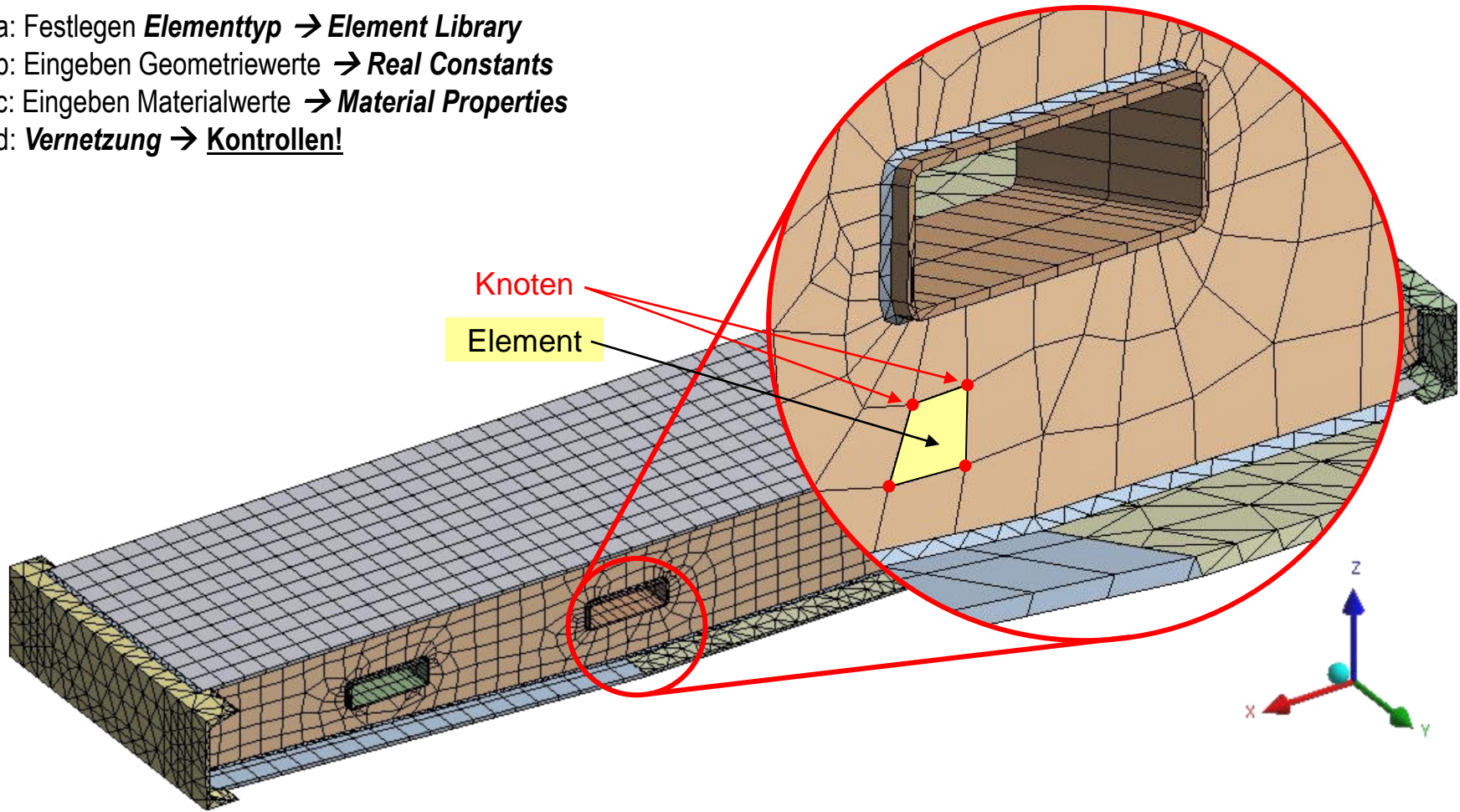

$$F_{1S} = (-4 \cdot u_{2S} + 0 \cdot u_{3S}) \cdot \frac{EA}{2l}$$
$$F_{4S} = (0 \cdot u_{2S} - 2 \cdot u_{3S}) \cdot \frac{EA}{2l}$$

- a) Aufteilung System in finite Elemente, die über Knoten verbunden sind
- b) Aufstellung Steifigkeitsbeziehungen für jedes finite Element
→ Element-Steifigkeitsmatrizen
- c) Zusammenbau der Element-Steifigkeitsmatrizen zur
→ Gesamt-Steifigkeitsmatrix (Koinzidenztabelle)
- d) Aufstellen äußerer Kraftvektor
- e) Aufstellen Verschiebungs-Randbedingungen
- f) Erstellen Gleichungssystem
- g) Lösung Gleichungssystem für unbekannte Verschiebungen
- h) Berechnung abgeleitete Größen:
 - Reaktionskräfte
 - Elementkräfte (Element-Steifigkeitsmatrizen)

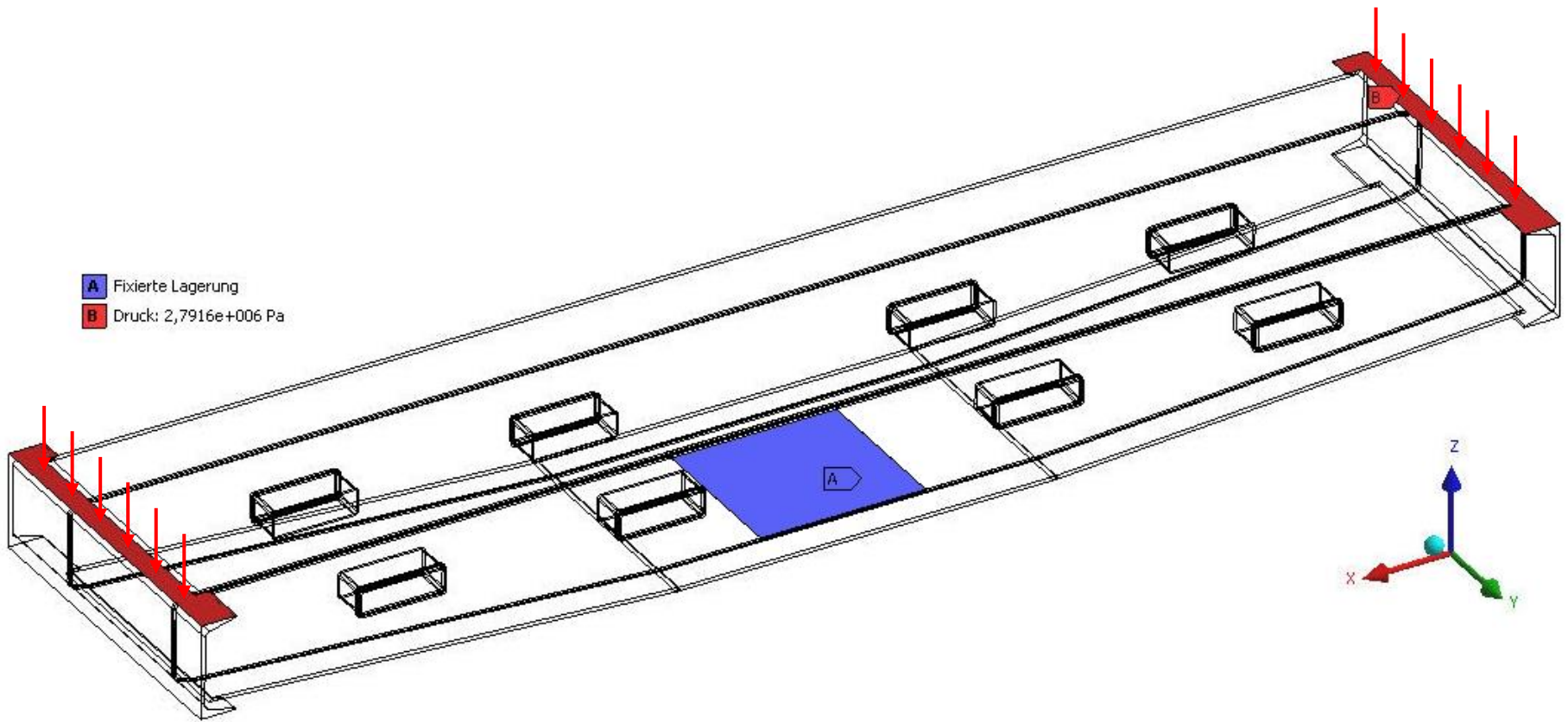


Folie FEM: Bsp. HQT – 2. Vernetzen des Geometriemodells

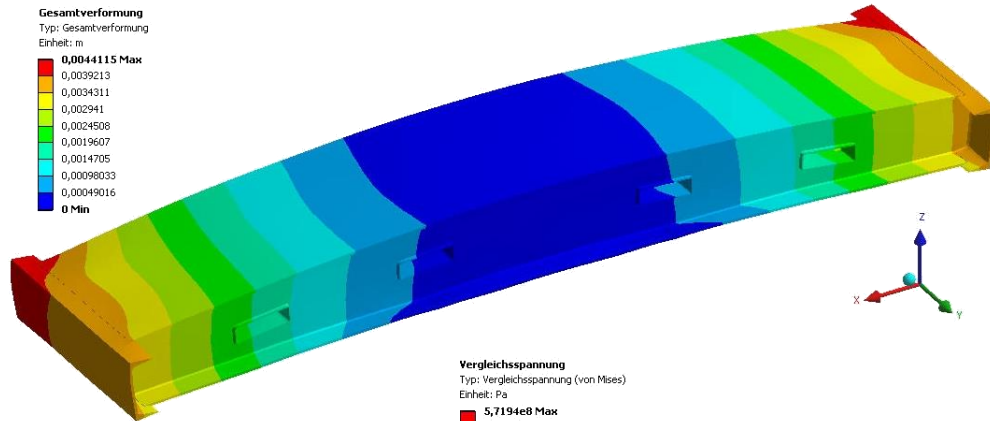
- 2a: Festlegen **Elementtyp** → **Element Library**
- 2b: Eingeben Geometriewerte → **Real Constants**
- 2c: Eingeben Materialwerte → **Material Properties**
- 2d: **Vernetzung** → **Kontrollen!**



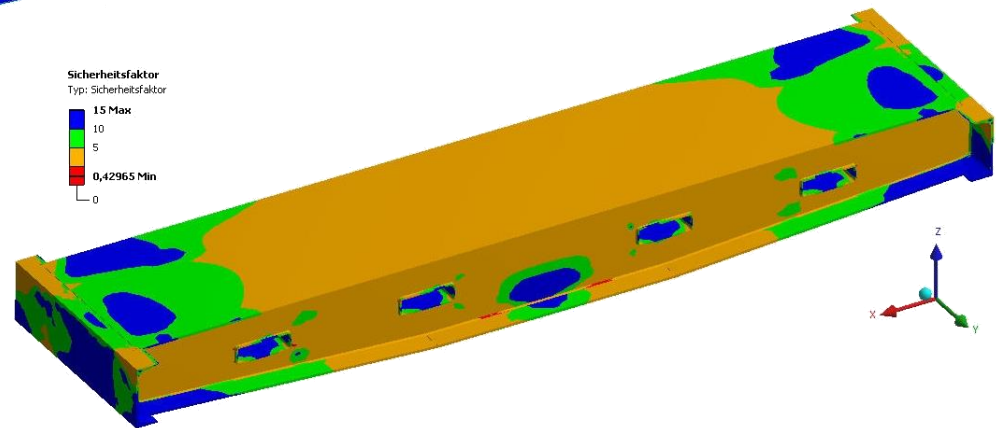
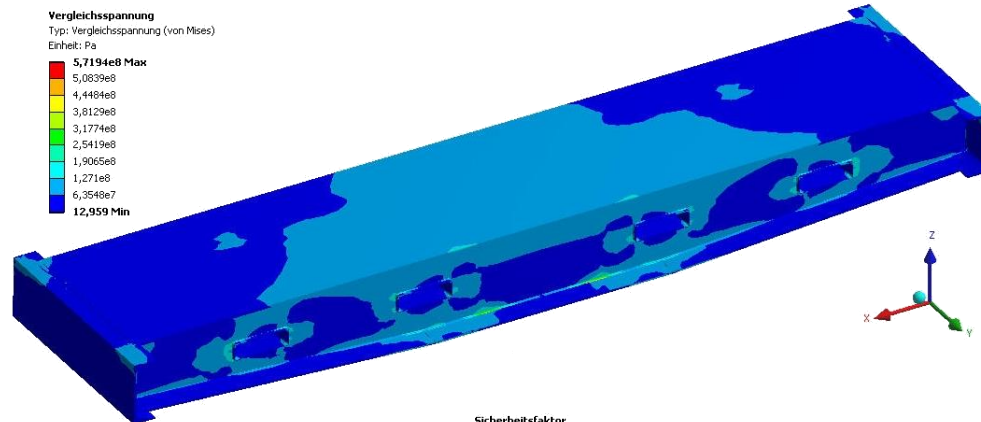
Folie FEM: Bsp. HQT – 3. Randbedingungen und Belastungen



Folie FEM: Bsp. HQT – 5. Postprocessing: Ergebnisdarstellung

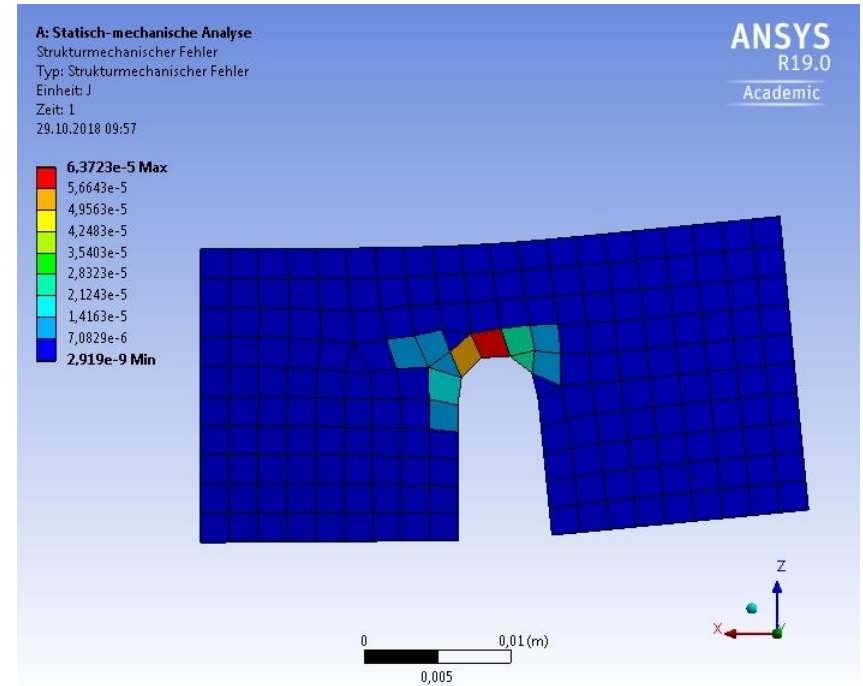
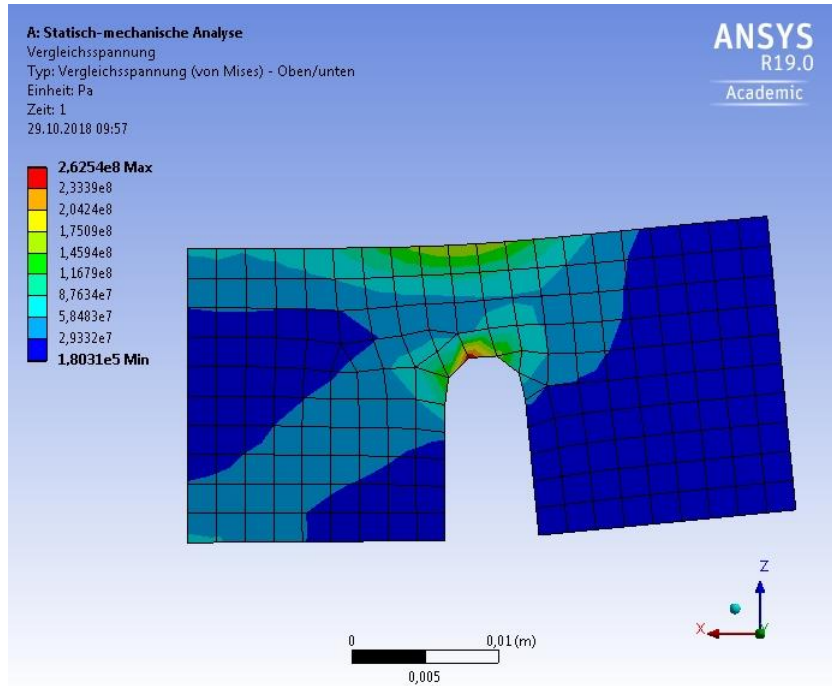


Primäre Ergebnisse: Verschiebungen am Knoten



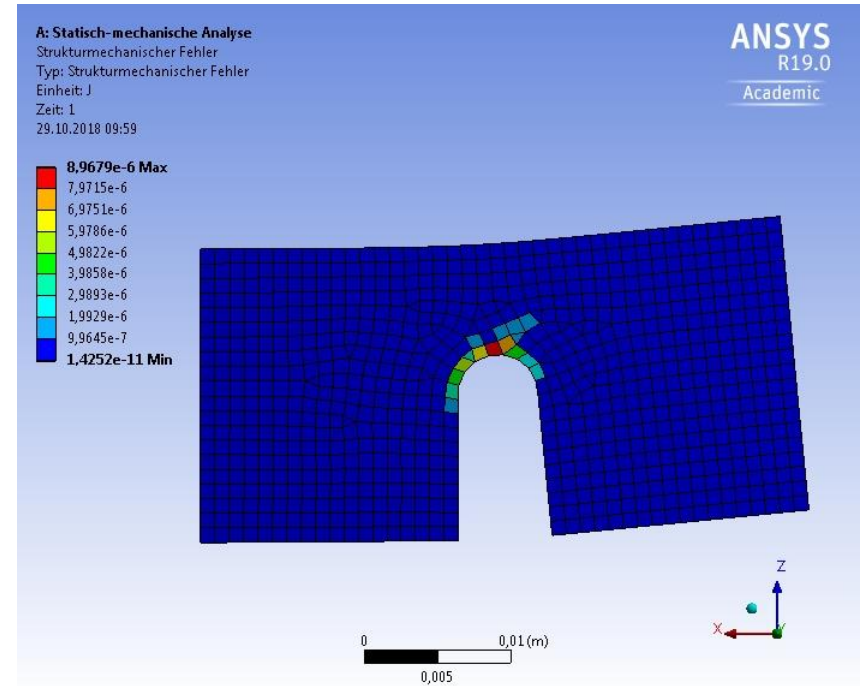
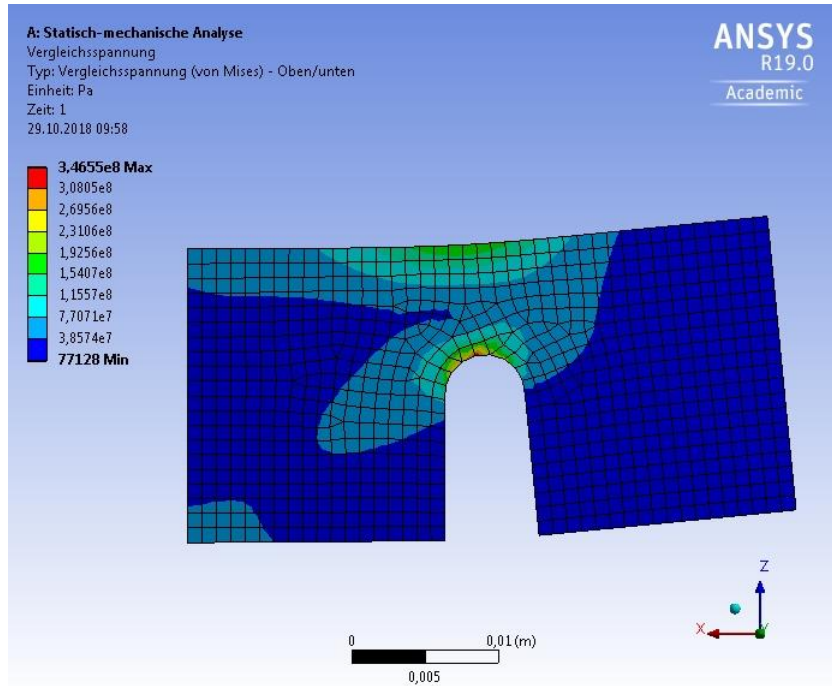
Abgeleitet: Dehnungen, Spannungen, ...

Modellvariante 1: Elementgrößenfunktion: Gleichmäßig; „Max. Flächengröße“: 0,002 mm



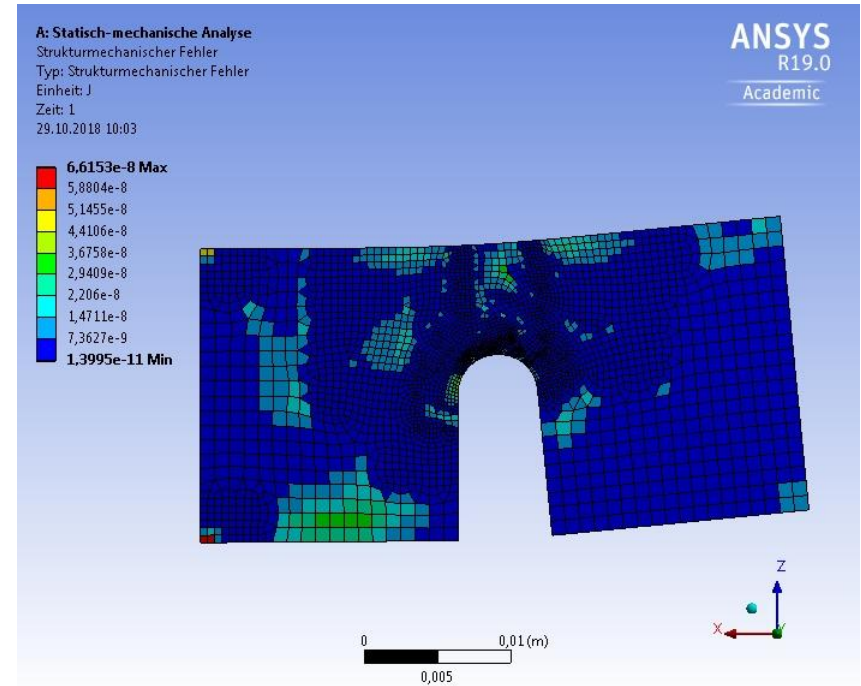
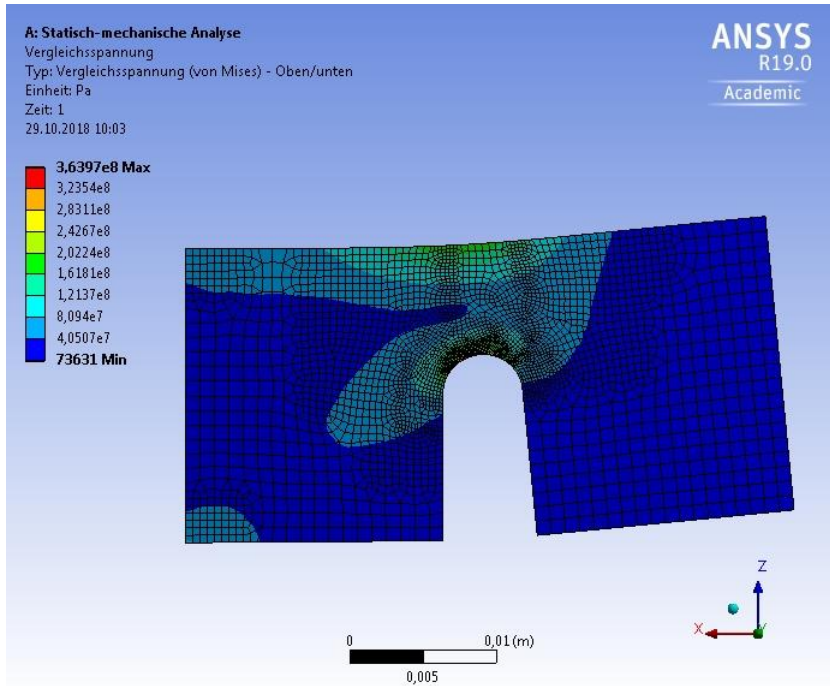
- großer Fehler im Bereich der max. Spannung

Modellvariante 2: Elementgrößenfunktion: Gleichmäßig; „Max. Flächengröße“: 0,001 mm



- gleichmäßigere Verteilung im Bereich der max. Spannung

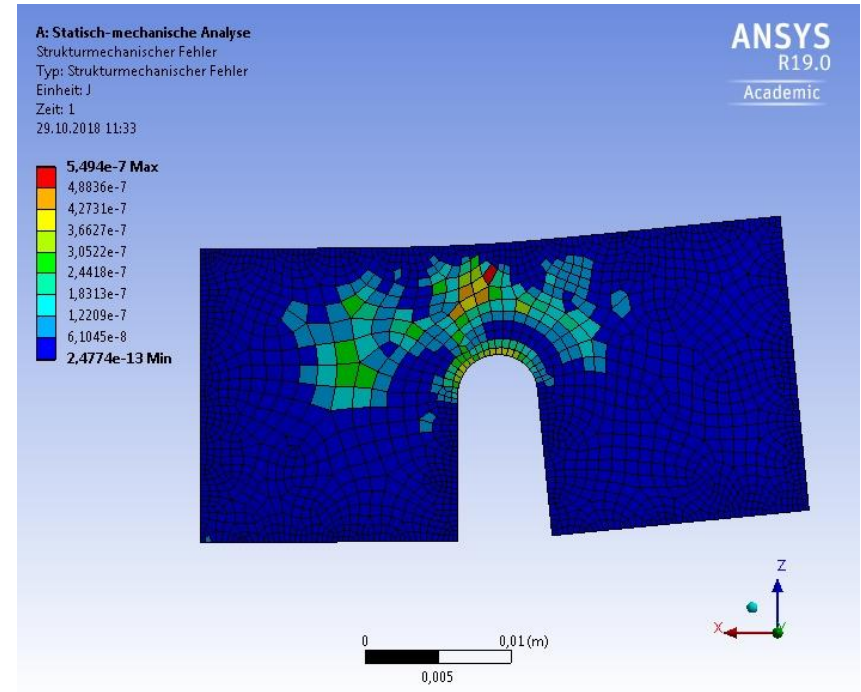
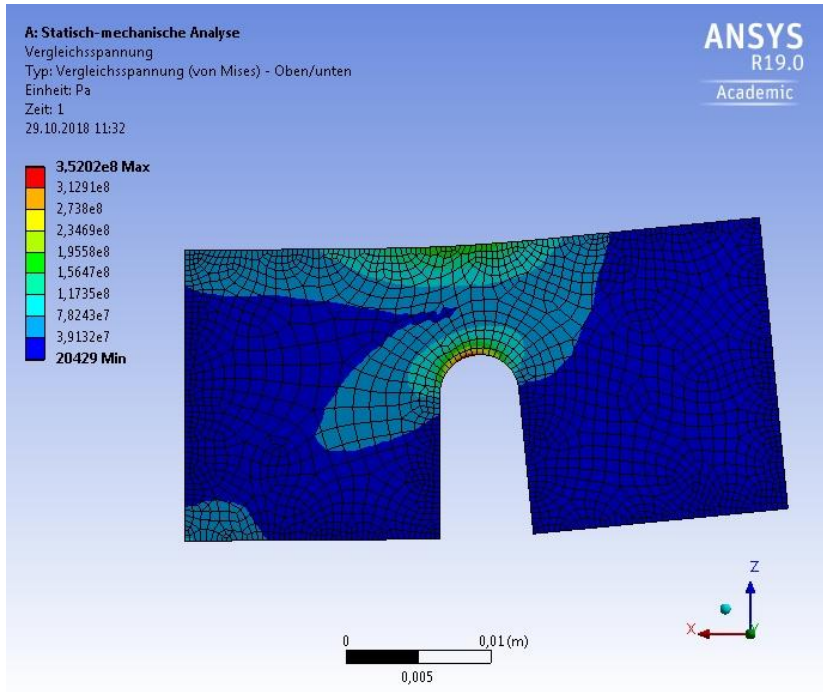
Modellvariante 3: Modellvariante 2 + adaptive Verfeinerung (10% Abweichung)



- sehr gleichmäßige Verteilung im Bereich der max. Spannung
- max. Fehler an nicht relevanter Lasteinleitung

→ für realistische Bauteile meist zu hohe Netzverfeinerung

Modellvariante 4: adaptive Vernetzungsgrößenfunktion



- max. Fehler nicht in Bereich größter Spannung

- Was ist die statische Unbestimmtheit? Wie wird Sie bestimmt?
- Skizzieren Sie die Biegemomentenverläufe für ein zweiachsiges / vierachsiges Schienenfahrzeug mit und ohne Sprengwerk!
- Was ist ein Schubfeld? Welche Bedingungen müssen zur Berechnung erfüllt sein?
- Was ist das Prinzip einer FEM-Berechnung?
- Was sind die Vor- und Nachteile der FEM?
- Wie gehen Sie bei der statisch-mechanischen Analyse einer CAD-Konstruktion vor?
- Wie genau ist das Ergebnis einer FE-Berechnung? Welche Möglichkeiten zur Genauigkeitskontrolle kennen Sie?