

Aufgabe Partikelbewegung-1

a) Leiten Sie aus der Bewegungsgleichung für Partikel in Strömungen (Basset-Bousinesq-Oseen-Gleichung) ab, wie schnell ein zunächst ruhendes Partikel die stationäre Sinkgeschwindigkeit in einem viskosen und schweren Fluid erreicht! Vernachlässigen Sie hierfür die Basset-Kraft!

b) Stellen Sie für Sandpartikel in Wasser ($\Psi = 1$, $\rho_P = 2500 \text{ kg/m}^3$, $\rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\eta_F = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) den Sinkweg bis zum Erreichen der stationären Sinkgeschwindigkeit als Funktion der Partikelgröße dar!

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = 6\pi\eta a \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} + \frac{1}{2}\rho V_p \frac{d\mathbf{v}_{\text{rel}}}{dt} - V_p \nabla p + 6\pi\eta a \sqrt{\frac{a^2}{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{rel}}}{\partial \tau} d\tau + \sum \mathbf{F}_i$$

Aufgabe Partikelbewegung-1

Definition: $\mu\text{m} := 10^{-6} \text{ m}$

Vorgegebene Werte:

Wasser: $\rho_F := 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $\eta_F := 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Partikel: $\rho_P := 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $\Psi := 1$

Lösung:

1. Bewegungsgleichung für sedimentierende Partikel in viskosen Medien

Basset-Bousinesq-Oseen-Gleichung:

$$m_P \frac{d}{dt} \vec{u}_P = 6 \cdot \pi \cdot \eta_F \cdot a \cdot \vec{v}_{\text{rel}} + \frac{1}{2} \cdot \rho_F \cdot V_P \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_{\text{rel}} \right) - V_P \cdot \text{grad}(p) + \vec{F}_{\text{Basset}} + \vec{F}_{\ddot{a}}$$

mit: $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_F - \vec{u}_P$

Sedimentation: $\vec{F}_{\ddot{a}} = \vec{F}_G = m_P \cdot \vec{g}$

$$-V_P \cdot \text{grad}(p) = -\rho_F \cdot V_P \cdot \vec{g} = \vec{F}_{\text{Auftrieb}} \quad (\text{ruhende Flüssigkeit})$$

Vereinfachung für $v_F=0$ und $F_{\text{Basset}}=0$, skalare Darstellung:

$$m_P \frac{d}{dt} u_P = -6 \cdot \pi \cdot \eta_F \cdot a \cdot u_P - \frac{1}{2} \cdot \rho_F \cdot V_P \cdot \left(\frac{d}{dt} u_P \right) - \rho_F \cdot V_P \cdot g + 0 + \rho_P \cdot V_P \cdot g$$

$$\left(\rho_P + \frac{1}{2} \cdot \rho_F \right) \cdot V_P \cdot \frac{d}{dt} u_P + 6 \cdot \pi \cdot \eta_F \cdot a \cdot u_P = \Delta \rho \cdot V_P \cdot g$$

$$\rho' \cdot V_P \cdot \frac{d}{dt} u_P + \frac{u_P}{\mu_{\text{hd}}} = \Delta \rho \cdot V_P \cdot g \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} u_P + \frac{u_P}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot V_P} = \frac{\Delta \rho}{\rho' \cdot V_P} \cdot g$$

gewöhnliche lineare DGL 1ter Ordnung --> Exponentialansatz für homogene Lösung

$$y_h = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad \text{mit} \quad \lambda + \frac{1}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot V_P} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \lambda = -\frac{1}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot V_P} < 0$$

Konstante für partikuläre Lösung $y_P := C$

daraus folgt: $\lambda \cdot A \cdot e^{\lambda \cdot t} + \frac{A \cdot e^{\lambda \cdot t} + C}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot V_P} = \frac{\Delta \rho}{\rho' \cdot V_P} \cdot g$

stationäre Lösung ($t \rightarrow \infty$): $\lambda \cdot A \cdot e^{-\infty} + \frac{A \cdot e^{-\infty} + C}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot V_P} = \frac{\Delta \rho}{\rho' \cdot V_P} \cdot g$ also: $\frac{C}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot V_P} = \frac{\Delta \rho}{\rho' \cdot V_P} \cdot g$

$$C = g \cdot \Delta \rho \cdot V_P \cdot \mu_{hd} = \frac{g \cdot \Delta \rho \cdot \frac{6}{\pi} \cdot d^3}{3 \cdot \pi \cdot \eta_F \cdot d} = \frac{g \cdot \Delta \rho}{18 \cdot \eta_F} \cdot d^2 = v_{Stokes}$$

initiale Lösung (t=0): $u_p(t=0) = A \cdot e^0 + C = 0$ also: $A = -C = -v_{Stokes}$

Partikelgeschwindigkeit: $u_p(t) = v_{Stokes} \cdot (1 - e^{\lambda \cdot t})$ (Beachte: negatives Vorzeichen von λ)

Exponentielles Anpassen --> vollständiges Erreichen von v_{Stokes} erst für $t = \infty$.

Sinnvoller Vergleich mit Hilfe von Relaxationszeit $\tau_R = -1/\lambda$: Nach $t = \tau_R$ ist stationäre Endgeschwindigkeit schon zu 63% ($= 1 - e^{-1}$) erreicht, nach $t = 3\tau_R$ bereits zu 95% ($= 1 - e^{-3}$) und nach $5\tau_R$ zu 99%.

2. Sinkweg zum Erreichen des stationären Zustandes (instationäres "Anfahren")

Geschwindigkeit: $u_p(t) = \frac{d}{dt} z = v_{Stokes} \cdot (1 - e^{\lambda \cdot t}) = v_{Stokes} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_R}}\right)$

"Anfahr"-Weg $h_{S.inst}$: $h_{S.inst} = z(\Delta t) - z(0) = v_{Stokes} \cdot \int_0^{\Delta t} (1 - e^{\lambda \cdot t}) dt$

$$h_{S.inst} = v_{Stokes} \cdot \left[\Delta t - \frac{1}{\lambda} \cdot (e^{\lambda \cdot \Delta t} - 1) \right] = v_{Stokes} \cdot \left[\Delta t + \tau_R \cdot \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau_R}} - 1 \right) \right]$$

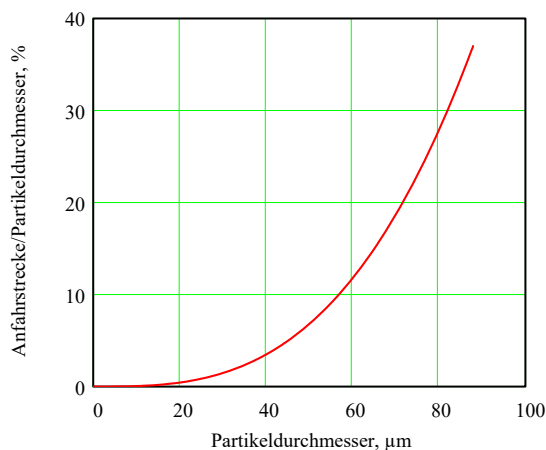
z.B. $\Delta t = 5 \cdot \tau_R$: $h_{S.inst} = v_{Stokes} [5 \cdot \tau_R - \tau_R \cdot (0.01 - 1)] = 4 \cdot \tau_R \cdot v_{Stokes}$

$$h_{S.inst} = 4 \cdot (\mu_{hd} \cdot \rho' \cdot P \cdot V_P) \cdot \left(\frac{g \cdot \Delta \rho \cdot V_P \cdot \mu_{hd}}{324 \cdot \eta_F^2} \right) = \frac{4 \cdot g \cdot \Delta \rho \cdot \rho' \cdot P}{324 \cdot \eta_F^2} \cdot d^4$$

konkret für Sand: $h_{S.inst}(d) := \frac{g \cdot (\rho_P - \rho_F) \cdot \left(\rho_P + \frac{1}{2} \cdot \rho_F \right)}{81 \cdot \eta_F^2} \cdot d^4$

Ende des Stokes-Bereiches: $d_{maxStokes} := \sqrt[3]{\frac{10 \cdot \eta_F^2}{g \cdot (\rho_P - \rho_F) \cdot \rho_F}}$ $d_{maxStokes} = 87.9 \mu m$
 (Stokes: $Ar < 10$)

$d := 0.1 \mu m, 0.2 \mu m, \dots, d_{maxStokes}$



In viskosen Flüssigkeiten wird die stationäre Sinkgeschwindigkeit im Stokes-Bereich in der Regel innerhalb einer Sinkstrecke erreicht, die kleiner ist als der Partikeldurchmesser.

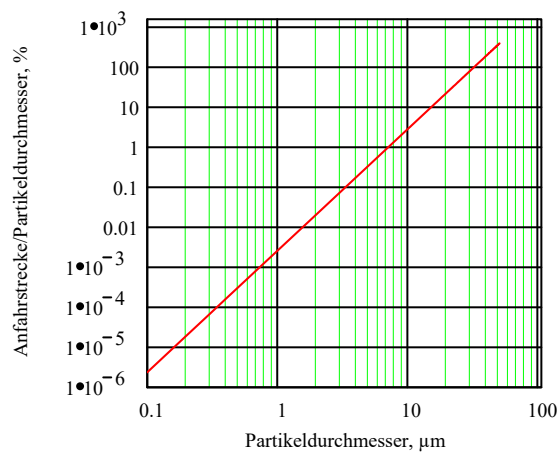
3. Berechnung für Sedimentation in Luft

Fluideigenschaften: $\rho_F := 1.2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $\eta_F := 0.000018 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

konkret für Sand:
$$h_{S.\text{inst}}(d) := \frac{g \cdot (\rho_P - \rho_F) \cdot \left(\rho_P + \frac{1}{2} \rho_F \right)}{81 \cdot \eta_F^2} \cdot d^4$$

Ende des Stokes-Bereiches: $d_{\text{maxStokes}} := \sqrt[3]{\frac{10 \cdot \eta_F^2}{g \cdot (\rho_P - \rho_F) \cdot \rho_F}}$ $d_{\text{maxStokes}} = 47.9 \mu\text{m}$
 (Stokes: $Ar < 10$)

$d := 0.1 \mu\text{m}, 0.2 \mu\text{m}.. d_{\text{maxStokes}}$



In viskosen Gasen kann die "Anfahrstrecke" für grobe Mikrometerpartikel ($d >> 1 \mu\text{m}$) durchaus ein Vielfaches des Partikeldurchmessers betragen.

4. Abschätzung zur Basset-Kraft für die obige Näherungslösung

Basset-Kraft:
$$F_{\text{Basset}} = 6 \cdot \sqrt{\pi \cdot \eta \cdot F \cdot \rho \cdot F \cdot a^2} \cdot \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{d}{d\tau} v_{\text{rel}} d\tau$$

Relativgeschwindigkeit:
$$v_{\text{rel}}(t) = -u_p(t) = -v_{\text{Stokes}} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) = -v_{\text{Stokes}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot P \cdot V_P}}\right)$$

zeitliche Ableitung:
$$\frac{d}{dt} v_{\text{rel}} = v_{\text{Stokes}} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} = (g \cdot \Delta \rho \cdot V_P \cdot \mu_{\text{hd}}) \cdot \left(-\frac{1}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot P \cdot V_P}\right) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\frac{d}{dt} v_{\text{rel}} = g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho' \cdot P} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

mit
$$\lambda = \frac{1}{\mu_{\text{hd}} \cdot \rho' \cdot P \cdot V_P} = \frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot F \cdot a}{\rho' \cdot P \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta \cdot F}{\rho' \cdot P \cdot a^2}$$

Basset-Integral
$$\int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{d}{d\tau} v_{\text{rel}} d\tau = v_{\text{Stokes}} \cdot \lambda \cdot \int_0^t \frac{e^{-\lambda \cdot \tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = v_{\text{Stokes}} \cdot \lambda \cdot I_B$$

normierte Basset-Kraft:
$$f_{\text{Basset}} = \frac{F_{\text{Basset}}}{F_{\text{Stokes}}} = \frac{6 \cdot \sqrt{\pi \cdot \eta \cdot F \cdot \rho \cdot F \cdot a^2} \cdot I_{\text{Basset}}}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot F \cdot a \cdot v_{\text{rel}}} = \frac{6 \cdot \sqrt{\pi \cdot \eta \cdot F \cdot \rho \cdot F \cdot a^2} \cdot v_{\text{Stokes}} \cdot \lambda \cdot I_B}{-6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot F \cdot a \cdot v_{\text{Stokes}} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})}$$

$$f_{\text{Basset}} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{\eta \cdot F \cdot \rho \cdot F}{\pi \cdot \rho' \cdot P}} \cdot a^3 \cdot \frac{I_B}{(1 - e^{-\lambda \cdot t})}$$

Abschätzung für Wasser:

Fluideigenschaften: $\rho_F := 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \eta_F := 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Relaxationszeit:
$$\tau_R(a) := \left(\frac{9}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\eta_F}{\rho_P + 0.5 \cdot \rho_F} \right)^{-1}$$

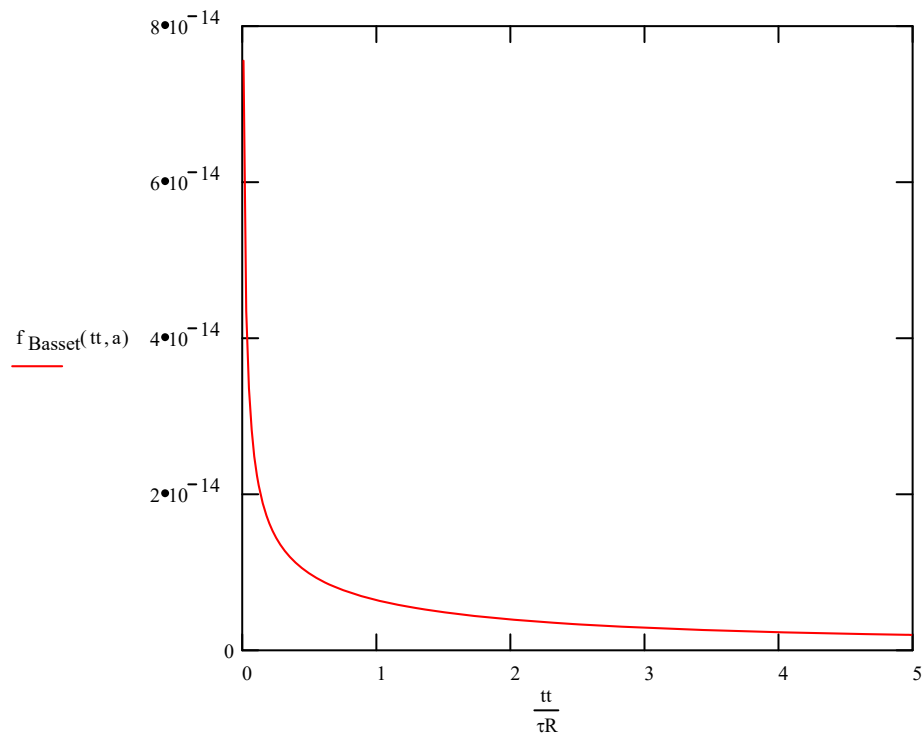
Basset-Integral:
$$I_B(t, a) := \int_0^t \frac{e^{-\frac{\tau}{\tau_R(a)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

normierte Basset-Kraft:
$$f_{\text{Basset}}(t, a) := \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{\eta_F \cdot \rho \cdot F}{\pi \cdot (\rho_P + 0.5 \cdot \rho_F)}} \cdot a^3 \cdot \frac{I_B(t, a)}{\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_R(a)}\right)\right)}$$

Partikelradius: $a := 100 \mu\text{m}$

Relaxationszeit: $\tau_R := \tau_R(a)$

$t := 0.01 \cdot \tau_R, 0.03 \cdot \tau_R \dots 5 \cdot \tau_R$



Die Basset-Kraft ist vernachlässigbar klein für die Sedimentation im Stokes-Bereich.